Diskrétní matematika
Zadání domácích úkolů

14. prosince 2023

1 Zadáno 14. 12. 2023 (Termín odevzdání 4. 1. 2024)

Příklad 1. *Nalezněte chybu v následujícím důkazu tvrzení „Každý graf s alespoň třemi vrcholy a se všemi stupni velikosti alespoň dva obsahuje cyklus C_3."* **[4]**

Důkaz. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n. Tvrzení platí v případě $n = 3$, protože daný graf může být jen C_3. Uvažme indukční krok, nechť G je graf na $n-1$ vrcholech se všemi stupni velikosti alespoň dva. Pro G tvrzení platí z indukčního předpokladu a tedy obsahuje C_3. Vytvoříme z G nový graf G' na n vrcholech přidáním nového vrcholu, který je incidentní s alespoň dvěma vrcholy z G. Protože G obsahoval cyklus C_3, tak jej G' obsahuje také. $\square$

Příklad 2. *Pro každou dvojici přirozených čísel n, k, která splňuje podmínky $n \geq k+1$ a $2 \mid kn$, sestrojte k-regulární graf na n vrcholech. Graf je k-regulární, mají-li všechny jeho vrcholy stupeň k.* **[3]**

Příklad 3. *Nechť T je strom s aspoň dvěma vrcholy takový, že pro každou jeho hranu e mají obě komponenty v $T-e$ lichý počet vrcholů. Dokažte, že potom má každý vrchol v T lichý stupeň.* **[4]**

Příklad 4. *Nechť T je strom s $n \geq 2$ vrcholy. Nechť p_i, $i \in \mathbb{N}$, označuje počet vrcholů v T stupně i. Ukažte, že platí* **[3]**

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \cdots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

Příklad 5. *Nechť $T_1, T_2, \ldots, T_k$ jsou podstromy stromu T takové, že každé dva mají neprázdný společný průnik. Ukažte, že potom existuje vrchol společný všem podstromům T_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.* **[5]**