Diskrétní matematika
Zadání domácích úkolů

9. listopadu 2023

1 Zadáno 9. 11. 2023 (Termín odevzdání 23. 11. 2023)

Příklad 1. *Nechť k, n jsou přirozená čísla. Dokažte, že číslo $(kn)!$ je dělitelné číslem $(k!)^n$.* **[4]**
Hint: zkuste uvážit kombinatorickou interpretaci.

Příklad 2. *Pro $n \geq 100$ rozhodněte, čeho je více:* **[3]**

(a) zobrazení z n-prvkové množiny do tříprvkové množiny, nebo

(b) řetězců délky 5 v uspořádání $(\{1, 2, \ldots, n\}, \leq)$? Řetězec v částečně uspořádané množině $(X, \preceq)$ je množina $Y \subseteq X$ taková, že každé dva prvky v Y jsou v $\preceq$ porovnatelné.

Své rozhodnutí srozumitelně zdůvodněte, samotná nerovnost je téměř bezcenná.

Příklad 3. *Pro všechna celá čísla $n \geq r \geq 1$ dokažte, že platí* **[4]**

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

(Pozor! Při postupu matematickou indukcí podle n při pevném r nestačí jako začátek indukce zvolit $n = r = 1$.)

Příklad 4. *Kolik existuje k-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, v nichž se nevyskytují žádná dvě po sobě jdoucí čísla?* **[6]**