DÚ 3.1

DOKAŽTE, ŽE $rn!$ JE DĚLITELNÉ ČÍSLEM $(r!)^m$.

$m=3, r=3$

1 2 3 1 1 3 1 2 3 2 2 3

$rn!$ = POČET USPOŘÁDÁNÍ rn KULIČEK

$\mathbb{Z} \ni \frac{rn!}{(r!)^m}$ = POČET USPOŘÁDÁNÍ rn KULIČEK m BAREV, KDE KAŽDÁ BARVA MÁ r KULIČEK

$\Rightarrow (r!)^m \mid rn!$

$$\mathbb{Z} \ni \binom{rn}{r}\binom{rn-r}{r}\cdot\binom{rn-2r}{r}\cdots\binom{rn-(m-1)r}{r} = \frac{rn!}{(r!)^m}$$

$$\frac{rn!}{(r!)^m} = \binom{rn}{\underbrace{r,\dots,r}_{m}}$$

DÚ 3.2

ČEHO JE VÍCE PRO $m \geq 100$?

a) ZOBRAZENÍ $f: \{1,\dots,m\} \longrightarrow \{1,2,3\}$ NEBO

b) ŘETĚZCŮ DÉLKY 5 V $(\{1,\dots,m\}, \leq)$?

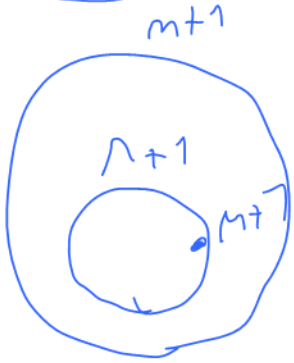
a) 3^m

b) $\leq$ JE LINEÁRNÍ $\Rightarrow$ $\forall$ PODMNOŽINA 5 PRVKŮ TVOŘÍ ŘETĚZEC

$\Rightarrow \binom{m}{5}$

$$3^m > m^5 \geq \binom{m}{5}$$

DÚ 3.3 DOKAŽTE $\binom{n}{n} + \dots + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n+1}$ PRO $m \geq n \geq 1$



$\binom{m+1}{n+1}$ = # PODMNOŽIN VELIKOSTI $n+1$ MNOŽINY VELIKOSTI $m+1$

i-TÝ KOEFICIENT $\binom{n+i-1}{n}$ SE DÁ ÚVÁŽIT JAKO NA VÝBĚR PODMNOŽIN VELIKOSTI $n+1$ Z $m+1$ PRVKŮ, KDE MAX. PRVEK JE $n+i$

DU 3.4 KOLIK JE k-PRVKOVÝCH PODMNOŽIN MNOŽINY $\{1,\dots,n\}$ NEOBSAHUJÍCÍCH DVĚ PO SOBĚ JDOUCÍ ČÍSLA?

$n=8,\ k=3$

$x_1 < \dots < x_k$ NEJSOU PO SOBĚ JDOUCÍ

PAK $\underbrace{x_1 < x_2 - 1 < x_3 - 2 < \dots < x_k - k + 1}_{k\text{-TICE ČÍSEL Z } \{1,\dots,n-k+1\}}$

$x_1' < \dots < x_k'$ k-TICE ČÍSEL Z $\{1,\dots,n-k+1\}$, PAK

$x_1',\ x_2'+1,\ x_3'+2,\ \dots,\ x_k'+k-1$ JE k-TICE ČÍSEL Z $\{1,\dots,n\}$, KDE NEJSOU ŽÁDNÁ 2 PO SOBĚ JDOUCÍ

$\Rightarrow$ POČTY k-TIC JSOU STEJNÉ

$\rightarrow \underline{\underline{\binom{n-k+1}{k}}}$

CV 6.3 PRO EULEROVU FUNKCI φ DOKAŽTE $\varphi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$, KDE $m = p_1^{l_1}\cdots p_n^{l_n}$ JE PRVOČÍSELNÝ ROZKLAD ČÍSLA m

$$\varphi(m) = |\{n \in \{1,\dots,m\} : NSD(m,n) = 1\}|$$

$$\varphi(6) = 2 \qquad (NSD(1,6) = 1 = NSD(5,6))$$

$$\varphi(p) = p-1 \qquad \underbrace{1,\dots,p-1}_{p-1},\cancel{p}$$

$$\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$$

$$\underbrace{\underbrace{\overbrace{1,2,\dots}^{p-1},\cancel{p}}\;\underbrace{\overbrace{p+1,\dots}^{p-1},\cancel{2p}}\;\dots\;\underbrace{p^{a-1}\cdot p,\dots,\cancel{p^a}}}_{p^{a-1}}$$

- OD m ODEČÍTÁME NÁSOBKY p_i $(i=1,\dots,n)$
- $A_i = \{$ČÍSLA Z $\{1,\dots,m\}$ DĚLITELNÁ PRVOČÍSLEM $p_i\}$
- PAK $\varphi(m) = m - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$

$$|A_i| = \frac{m}{p_i}, \qquad I \subseteq \{1,\dots,n\} : \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| = \frac{m}{\prod_{i\in I} p_i}$$

$$\varphi(m) = m - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| \overset{PIE}{=} m - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,\dots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right| =$$

$$= m - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,\dots,n\}}{k}} \frac{m}{\prod_{i\in I} p_i} =$$

$$= \underbrace{m \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \sum_{I \in \binom{\{1,\dots,n\}}{k}} \frac{1}{\prod_{i\in I} p_i}} = \underbrace{m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)}$$

$I = \{$ZÁVORKY, ZE KTERÝCH JSME VYBRALI $-1/p_i\}$ $\boxtimes$

$n=3$

$$\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \sum_{I\in\binom{\{1,2,3\}}{k}} \prod_{i\in I} \frac{1}{p_i} = \underbrace{\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)}$$

$$\underbrace{1\cdot1\cdot1}_{I=\emptyset} - \underbrace{\frac{1}{p_1}\cdot1\cdot1}_{I=\{1\}} + \underbrace{\frac{1}{p_1p_2}}_{I=\{1,2\}} + \dots - \underbrace{\frac{1}{p_1p_2p_3}}_{I=\{1,2,3\}}$$

$$\underbrace{(x+y)^n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n}$$

I = {závorky, ze kterých vybereme x}

$I=\{1,2\} \rightarrow x^2\cdot y^{n-2}$

$I \rightarrow x^{|I|}\cdot y^{n-|I|}$

$$(x+y)^n = \sum_{I\subseteq\{1,\dots,n\}} x^{|I|} y^{n-|I|} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

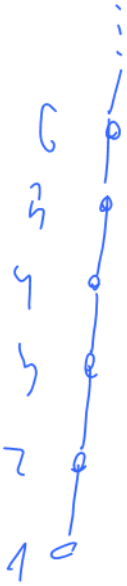
$$\underbrace{\binom{n+1}{k+1}} = \underbrace{\binom{n}{k+1}} + \underbrace{\binom{n}{k}}$$

podmnožin k+1 prvků z n+1 prvků

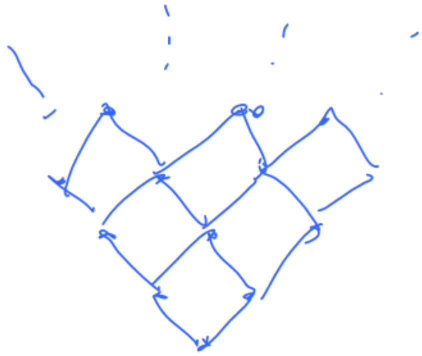
podmnožiny velikosti k+1 neobsahující 1

obsahující 1

$(\mathbb{N}, \leq)$



$(\mathbb{Z}, \leq)$



$\{1, 2, 3, \dots\}$