

Diskrétní matematika — příklady na 8. cvičení

23. listopadu 2020

1 Úvod do teorie grafů

(Neorientovaný) graf G je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran. Důležitými grafy jsou například

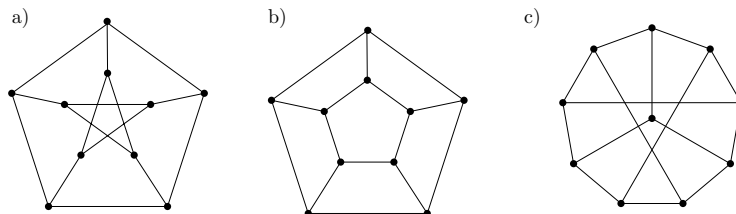
- úplný graf na n vrcholech $K_n = (V, \binom{V}{2})$, $|V| = n$,
- cyklus $C_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\}: i = 1, \dots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\})$,
- cesta $P_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\}: i = 1, \dots, n-1\})$,
- úplný bipartitní graf $K_{m,n}$, kde $m, n \geq 1$, $V = \{u_1, \dots, u_m\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$ a $E = \{\{u_i, v_j\}: i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$.

Graf H je podgrafem grafu G , pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. Stupeň vrcholu v je počet hran grafu G obsahujících vrchol v , značíme jej $\deg_G(v)$. Graf G je souvislý, pokud v něm pro každé jeho dva vrcholy u, v existuje cesta z u do v . Řekneme, že grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou izomorfní, pokud existuje bijekce $f: V \rightarrow V'$ taková, že platí $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\} \in E'$. Jako doplněk grafu G značíme graf \overline{G} , který má hrany právě mezi těmi vrcholy, mezi kterými je G nemá.

Příklad 1. Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož vrcholy by měly všechny stupně různé?

Příklad 2. Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?

Příklad 3. Které z následujících grafů jsou izomorfní?



Příklad 4. Nechť máme $m, n, k \in \mathbb{N}$.

(a) Spočítejte počet cyklů délky k v grafu K_n .

(b) Spočítejte počet cyklů délky k v grafu $K_{m,n}$.

Příklad 5. Ukažte, že každý graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň alespoň d , obsahuje cestu na $d+1$ vrcholech jako podgraf.

Příklad 6. Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.