Diskrétní matematika — 4. cvičení*

26. října 2020

1 Částečná uspořádání

Relace $\preceq$ na X se nazývá *(částečné) uspořádání*, jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní. Pár $(X, \preceq)$ se nazývá *částečně uspořádaná množina.*

Máme-li nějaké částečné uspořádání $\preceq$, tak můžeme definovat odvozenou relaci *ostré nerovnosti* $\prec$ takto: $a \prec b$ právě tehdy, když $a \preceq b$ a $a \neq b$. Také lze definovat *obrácenou nerovnost*, tedy relaci $\succeq$, vztahem $a \succeq b \Leftrightarrow b \preceq a$.

Hasseův diagram je znázornění částečně uspořádané množiny $(X, \preceq)$, kde každý prvek množiny X tvoří bod (vrchol). Dva vrcholy x a y se spojí čarou (hranou) vedenou zdola nahoru od x k y, jestliže $x \prec y$ a neexistuje $z \in X$ takové, že $x \prec z \prec y$.

Částečné uspořádání $\preceq$ na X je *lineární*, pokud pro každé $x, y \in X$ platí $x \preceq y$ nebo $y \preceq x$.

Prvek $a \in X$ nazýváme *minimálním prvkem* $(X, \preceq)$, pokud neexistuje žádné $x \in X$ takové, že $x \prec a$. *Maximální prvek* a je definován podobně (neexistuje žádné $x \succ a$).

Prvek $a \in X$ nazýváme *nejmenším prvkem* $(X, \preceq)$, jestliže pro každé $x \in X$ platí $a \preceq x$. Podobně definujeme *největší prvek* ($x \preceq a$ pro každé $x \in X$).

Příklad 1. *Uvažme relaci $\preceq$ na množině $\mathbb{R}^3$ definovanou předpisem*

$$(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow (a_1 \geq a_2 \;\&\; b_1 \geq b_2 \;\&\; c_1 \leq c_2).$$

Jedná se o částečné uspořádání?

Příklad 2. *(a) Ukažte, že největší prvek je maximální, a ukažte příklad uspořádané množiny, která má maximální prvek, ale nemá největší prvek.*

(b) Uvažme uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, \preceq)$, kde $x \preceq y \Leftrightarrow y \mid x$ (tj. x je dělitelné prvkem y). Rozhodněte, zda má nejmenší prvek. Má minimální? Maximální? Největší?

Příklad 3. *Dokažte, že nejmenší prvek, pokud existuje, je určen jednoznačně.*

Příklad 4. *Dokažte, že pro lineárně uspořádané množiny je každý minimální prvek rovněž nejmenší.*

Příklad 5. *(a) Nechť $\preceq_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, jsou uspořádání na nějaké množině X. Ukažte, že $\cap_{i=1}^{k} \preceq_i$ je opět uspořádání. (Uvědomte si, že každé $\preceq_i$, jakožto relace, je podmnožinou $X \times X$.)*

(b) (*) Dokažte, že libovolné částečné uspořádání $\leq$ na konečné množině X se dá vyjádřit jako průnik lineárních uspořádání.

Hint: Pro částečně uspořádanou množinu $(X, \leq)$ a neporovnatelné prvky $a, b \in X$ v relaci $\leq$, uvažte relaci $\preceq_{a,b} = \preceq$ na X, kde $x \preceq y$, právě tehdy, když $x \leq y \vee (x \leq a \;\&\; b \leq y)$.

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/