

Diskrétní matematika — 13. cvičení

4. ledna 2021

1 Základy pravděpodobnosti podruhé

Rozdělení náhodné veličiny X je funkce z \mathbb{R} do $[0, 1]$ přiřazující každému $v \in \mathbb{R}$ hodnotu $P(X = v) = P(\{z \in \Omega : X(z) = v\})$. Distribuční funkce náhodné veličiny X je funkce z \mathbb{R} do $[0, 1]$ přiřazující každému $v \in \mathbb{R}$ hodnotu $P(X \leq v) = P(\{z \in \Omega : X(z) \leq v\})$. Rozptyl náhodné veličiny X je definován jako $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

Markovova nerovnost. Pro nezápornou náhodnou veličinu X se střední hodnotou $\mathbb{E}[X] = m > 0$ platí pro každé reálné číslo $t > 0$

$$P(X \geq tm) \leq \frac{1}{t}.$$

Čebyševova nerovnost. Pro nezápornou náhodnou veličinu X se střední hodnotou $\mathbb{E}[X] = m$ platí pro každé reálné číslo $t > 0$

$$P(|X - m| \geq t\sqrt{\text{Var}[X]}) \leq \frac{1}{t^2}.$$

Příklad 1. Určete distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl následujících rozdělení.

(a) Nula-jedničkové rozdělení: rozdělení náhodné veličiny X , která nabývá jen hodnot 0 a 1 s pravděpodobnostmi $1 - p$ a p pro nějaké $p \in (0, 1)$.

(b) Binomické rozdělení: rozdělení náhodné veličiny X , která nabývá hodnot $k = 0, 1, \dots, n$ s pravděpodobnostmi $\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0, 1)$.

Hint: Při počítání rozptylu se může hodit vědět, že $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X - 1)] + \mathbb{E}[X]$.

Příklad 2. Mějme n bodů v rovině, kde žádné tři neleží na společné přímce. Mezi každými dvěma body nakreslíme úsečku s pravděpodobností $1/2$.

(a) Pro $k \in \{1, \dots, n\}$, jaká je střední hodnota počtu X_n k -tic daných bodů takových, že mezi každým párem bodů této k -tice je nakreslená úsečka?

(b) Pro jak velké $k = k(n)$ téměř jistě nenajdeme žádnou k -tici takových bodů? Neboli pro jak velké $k = k(n)$ je $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \geq 1) = 0$?

Hint: Markovova nerovnost.

Příklad 3. Dokažte, že pro každé $m \geq 1$ platí

$$\binom{2m}{m} \geq \frac{2^{2m}}{4\sqrt{m} + 2}.$$

Hint: Uvažte náhodnou veličinu X , která je součtem $2m$ náhodných veličin nabývajících hodnot 0 a 1 s pravděpodobností $1/2$ a použijte Čebyševovu nerovnost.