

# Diskrétní matematika — příklady na 10. cvičení

7. prosince 2020

## 1 Rovinné grafy a barevnost

*Rovinný graf*  $G$  je graf, který má alespoň jedno rovinné nakreslení, ve kterém mají spojitě křivky odpovídající různým hranám společné nanejvýš koncové body. Po odstranění těchto křivek se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěny nakreslení grafu*  $G$ . Řekneme, že graf  $H$  je *podrozdělením* grafu  $G$ , pokud  $H$  je izomorfní grafu, který z  $G$  dostaneme podrozdělováním jeho hran, tj. umístováním vrcholů na hrany.

**Eulerova formule.** *Nechť  $G = (V, E)$  je souvislý rovinný graf. Označme  $v = |V|$ ,  $e = |E|$  a jako  $f$  počet stěn nakreslení grafu  $G$ . Potom platí  $v + f - e = 2$ .*

**Kuratowského věta.** *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení  $K_5$  ani  $K_{3,3}$ .*

Také z přednášky víme, že každý rovinný graf na  $n$  vrcholech má nanejvýš  $3n - 6$  hran a pokud navíc neobsahuje trojúhelník, tak má nanejvýš  $2n - 4$  hran.

Zobrazení  $b: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  nazveme *obarvením grafu*  $G = (V, E)$ , pokud pro každou hranu  $\{u, v\} \in E$  platí  $b(u) \neq b(v)$ . *Barevnost grafu*  $G$ , označovaná  $\chi(G)$ , je minimální počet barev nutný k obarvení  $G$ .

**Věta o čtyřech barvách.** *Každý rovinný graf jde obarvit čtyřmi barvami.*

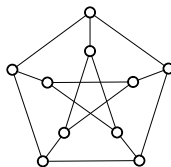
**Příklad 1.** *Nalezněte příklad triangulace, na které se rozbije následující nesprávný důkaz Věty o čtyřech barvách:*

*Důkaz.* Stačí uvažovat jen maximální rovinné grafy, čili triangulace, protože přidáním hrany neklesne barevnost. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů  $n$ . Pro  $n = 3$  je tvrzení triviální, protože  $\chi(K_3) = 3$ . Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny triangulace na  $n$  vrcholech. Přidáním vrcholu  $v$  do stěny  $F$   $n$ -vrcholové triangulace  $T'$  a spojením  $v$  hranami se všemi vrcholy stěny  $F$  obdržíme triangulaci  $T$  na  $n + 1$  vrcholech. Uvažme obarvení  $T'$  nanejvýš čtyřmi barvami, které máme z indukčního předpokladu. Protože  $v$  sousedí se třemi vrcholy, můžeme  $v$  obarvit za použití nanejvýš čtyř barev. Tím obdržíme obarvení s nanejvýš čtyřmi barvami pro  $T$  a tvrzení tak platí i pro triangulace s  $n + 1$  vrcholy.  $\square$

**Příklad 2.** *Bud'  $G$  rovinný graf neobsahující  $K_3$ . Dokažte  $\chi(G) \leq 4$ .*

**Příklad 3.** *Nalezněte rovinná nakreslení grafů  $K_5$ ,  $K_6$  a  $K_7$  na toru.*

**Příklad 4.** *Ukažte, že Petersenův graf není rovinný.*



**Příklad 5.** *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.*