

# Diskrétní matematika – příklady na 1. cvičení\*

5. října 2020

## 1 Výroky

**Příklad 1.** Necht  $M$  je množina osob přítomných v posluchárně a necht  $W(x, y)$  znamená: osoba  $x$  zná příjmení osoby  $y$ . Zkoumejte platnost výroků

$$\begin{aligned}\forall x \in M \exists y \in M : W(x, y); \\ \forall y \in M \exists x \in M : W(x, y); \\ \exists x \in M \forall y \in M : W(x, y); \\ \exists y \in M \forall x \in M : W(x, y).\end{aligned}$$

**Příklad 2.** Platí výrok

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} : (z > y \Rightarrow z > x)) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} : (z > y \ \& \ z \leq x))?$$

## 2 Matematická indukce

**Příklad 3.** Dokažte matematickou indukcí platnost následujících vztahů pro každé  $n \in \mathbb{N}$

(a)  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ .

(b)  $\sum_{i=1}^n i^3 = (\sum_{i=1}^n i)^2$ .

**Příklad 4.** Uvažme Fibonacciho posloupnost  $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , což je posloupnost splňující rekurentní podmínky  $F_1 = F_2 = 1$  a  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  pro  $n \geq 3$ . Ukažte, že platí

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

**Příklad 5.** Mějme šachovnici o rozměrech  $2^n \times 2^n$  pro  $n \in \mathbb{N}$ , na které chybí jedno rohové políčko. Ukažte, že je možné ji celou vydláždit dlaždicemi následujícího tvaru:



**Příklad 6.** Mějme  $n$  přímek v obecné poloze v rovině (tj. žádné tři se neprotínají v jednom bodě a žádné dvě nejsou rovnoběžné). Ukažte, že rovina je těmito přímkami rozdělena na  $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$  částí.

**Příklad 7.** Najděte chybu ve zmíněném důkazu tvrzení: Necht  $p_1, \dots, p_n$  je  $n \geq 2$  různých přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné. Potom všechny tyto přímky mají společný bod.

*Důkaz.* Postupujeme indukcí. Pro  $n = 2$  tvrzení platí. Necht platí pro  $n$  a mějme  $n + 1$  přímek  $p_1, \dots, p_{n+1}$ . Z indukčního předpokladu mají přímky  $p_1, p_2, \dots, p_n$  společný bod  $x$ . Podobně přímky  $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_{n+1}$  mají společný bod  $y$ . Přímka  $p_1$  leží v obou skupinách, proto obsahuje jak  $x$ , tak  $y$ . Totéž platí pro  $p_{n-1}$ . Poněvadž  $p_1$  a  $p_{n-1}$  jsou různoběžné a protínají se tedy jen v jednom bodě, platí  $x = y$ . Takže všechny přímky  $p_1, \dots, p_{n+1}$  mají společný bod.  $\square$

**Příklad 8 (\*).** Na ostrově žije 1000 domorodců, z nichž 900 má hnědé a 100 modré oči. Každý domorodec vidí barvu očí všech ostatních, ale nezná tu svoji. Jejich náboženství jim zakazuje se o barvě očí bavit a dozví-li se nějaký domorodec, že má modré oči, pak se musí následující den zabít. Jednoho dne kmen navštívil cestovatel neznalý místních zvyklostí, který při svém odjezdu neopatrně prohlásil: „To jsem rád, že vidím osobu s modrýma očima.“. Jaký vliv bude mít tato poznámka na domorodce?

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

- (a) Nestane se nic, protože cestovatel nepřinesl žádnou novou informaci. Každý člověk z kmene již před jeho návštěvou věděl, že někteří z místních mají modré oči.
- (b) Po 100 dnech všichni modroocí domorodci spáchají sebevraždu. To proto, že daná situace je speciální případ následující věty, která se dá dokázat matematickou indukcí.

**Věta.** *Nechť v kmene žije  $n \in \mathbb{N}$  domorodců s modrýma očima. Potom po  $n$  dnech od cestovatelova odjezdu všech  $n$  domorodců s modrýma očima spáchá sebevraždu.*

*Důkaz.* Postupujeme indukcí podle  $n$ . Pro  $n = 1$  si osamocený modrooký domorodec uvědomí, že cestovatel mluvil o něm a zabije se další den. Nyní uvažme  $n > 1$ . Každý modrooký domorodec bude uvažovat následovně: „Pokud nemám modré oči, pak je na ostrově jen  $n - 1$  osob s modrýma očima a ti podle indukce spáchají sebevraždu po  $n - 1$  dnech od cestovatelova odjezdu.“ Ale po  $n - 1$  dnech nikdo sebevraždu nespáchá, protože nikdo z nich do té doby nemá jak zjistit, že je sám modrooký. Pod  $n - 1$  dnech si tak každý z modrookých domorodců uvědomí, že sám musí mít modré oči a  $n$ -tý den spáchá sebevraždu.  $\square$