

Diskrétní matematika

Zadání domácích úkolů

4. ledna 2021

1 Zadáno 5. 10. 2020 (Termín odevzdání 19. 10. 2020)

Příklad 1. Chceme rozlámat tabulku čokolády s $m \times n$ dílky na jednotlivé dílky. Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce? [4]

Příklad 2. Jaký je počet slov délky n nad abecedou $\{A, B\}$, ve kterých se nevyskytují dvě po sobě jdoucí písmena B ? [3]

Příklad 3. Alice si přinesla tři svoje vlastní šestistěnné kostky (červenou, žlutou a modrou) a chce si s vámi zahrát hru, ve které budete každý házet svou na začátku vybranou kostkou, přičemž v každém kole vyhraje ten, komu padne vyšší číslo. Navíc si můžete jako první vybrat kostku, se kterou pak budete celou dobu házet. Kostky jsou spravedlivé, na červené jsou dvě trojky, dvě čtyřky a dvě osmičky, na žluté jsou dvě jedničky, dvě pětky a dvě devítky a na modré jsou dvě dvojky, dvě šestky a dvě sedmičky. Jakou kostku byste si zvolili? [3]

Příklad 4. Dokažte indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $(n^5 - n)$ dělitelné pěti. [3]

2 Zadáno 19. 10. 2020 (Termín odevzdání 2. 11. 2020)

Příklad 5. Najděte příklad dvojice relací (R, S) na X takové, že R i S jsou tranzitivní, ale $R \cup S$, $R \setminus S$ ani $R \Delta S$ tranzitivní nejsou. Operace symetrický rozdíl $R \Delta S$ vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin R a S , formálně $R \Delta S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$. [4]

Příklad 6. Dokažte, že platí $R \circ R^{-1} = \Delta_X$, je-li relace $R \circ R^{-1}$ reflexivní a slabě antisymetrická. Symbolem Δ_X značíme nejmenší reflexivní relaci na množině X : [4]

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Příklad 7. Dokažte, že uspořádaná množina $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ má nekonečně mnoho minimálních prvků. O která čísla se jedná? Nakreslete příslušný Hasseův diagram na prvcích $2, 3, \dots, 15$. [3]

Příklad 8. Nakreslete Hasseův diagram částečně uspořádané množiny $(\{2^k 3^l : k, l \in \mathbb{N}\}, |)$ (množina čísel dělitelných pouze 2 a 3 uspořádaná relací dělitelnosti). [3]

3 Zadáno 2. 11. 2020 (Termín odevzdání 16. 11. 2020)

Příklad 9. Nechť k, n jsou přirozená čísla. Dokažte, že číslo $(kn)!$ je dělitelné číslem $(k!)^n$. [4]
Hint: zkuste uvážit kombinatorickou interpretaci.

Příklad 10. Pro $n \geq 100$ rozhodněte, čeho je více: [3]

(a) zobrazení z n -prvkové množiny do tříprvkové množiny, nebo

(b) řetězců délky 5 v uspořádání $(\{1, 2, \dots, n\}, \leq)$? Řetězec v částečně uspořádané množině $(X, \preceq)$ je množina $Y \subseteq X$ taková, že každé dva prvky v Y jsou v $\preceq$ porovnatelné.

Své rozhodnutí srozumitelně zdůvodněte, samotná nerovnost je téměř bezcenná.

Příklad 11. Pro všechna celá čísla $n \geq r \geq 1$ dokažte, že platí [4]

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

(Pozor! Při postupu matematickou indukcí podle n při pevném r nestačí jako začátek indukce zvolit $n = r = 1$.)

Příklad 12. Kolik existuje k -prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, v nichž se nevyskytují žádná dvě po sobě jdoucí čísla? [6]

4 Zadáno 23. 11. 2020 (Termín odevzdání 7. 12. 2020)

Příklad 13. Nechť $\check{s}(n)$ značí počet permutací bez pevného bodu na n -prvkové množině. Dokažte vztah [3]

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

Příklad 14. Mějme množinu S velikosti n . Ukažte, že počet jejích podmnožin, které mají lichou velikost, se rovná počtu jejích podmnožin sudé velikosti. Jakému číslu se daný počet rovná? [3]

Příklad 15. Mějme čísla $r, m, n \in \mathbb{N}$ taková, že platí $r \leq m \leq n$. Kombinatorickou interpretací dokažte, že platí [3]

$$\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}.$$

5 Zadáno 7. 12. 2020 (Termín odevzdání 21. 12. 2020)

Příklad 16. Nalezněte chybu v následujícím důkazu tvrzení „Každý graf s alespoň třemi vrcholy a se všemi stupni velikosti alespoň dva obsahuje cyklus C_3 .“ [4]

Důkaz. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n . Tvrzení platí v případě $n = 3$, protože daný graf může být jen C_3 . Uvažme indukční krok, nechť G je graf na $n - 1$ vrcholech se všemi stupni velikosti alespoň dva. Pro G tvrzení platí z indukčního předpokladu a tedy obsahuje C_3 . Vytvoříme z G nový graf G' na n vrcholech přidáním nového vrcholu, který je incidentní s alespoň dvěma vrcholy z G . Protože G obsahoval cyklus C_3 , tak jej G' obsahuje také. $\square$

Příklad 17. Pro každou dvojici přirozených čísel n, k , která splňuje podmínky $n \geq k + 1$ a $2 \mid kn$, sestrojte k -regulární graf na n vrcholech. Graf je k -regulární, mají-li všechny jeho vrcholy stupeň k . [3]

Příklad 18. Nechť T je strom s aspoň dvěma vrcholy takový, že pro každou jeho hranu e mají obě komponenty v $T - e$ lichý počet vrcholů. Dokažte, že potom má každý vrchol v T lichý stupeň. [4]

Příklad 19. Nechť T je strom s $n \geq 2$ vrcholy. Nechť $p_i, i \in \mathbb{N}$, označuje počet vrcholů v T stupně i . Ukažte, že platí [3]

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \cdots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

Příklad 20. Nechť $T_1, T_2, \dots, T_k$ jsou podstromy stromu T takové, že každé dva mají neprázdný společný průnik. Ukažte, že potom existuje vrchol společný všem podstromům $T_i, i = 1, 2, \dots, k$. [5]

6 Zadáno 21. 12. 2020 (Termín odevzdání 4. 1. 2021)

Příklad 21. Dokažte, že pro každých n jevů $A_1, \dots, A_n$ v konečném pravděpodobnostním prostoru platí [3]

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

Uveďte formální důkaz založený na definici pravděpodobnostního prostoru.

Příklad 22. Dokažte, že v konečném pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) , ve kterém je $|\Omega|$ prvočíslo a ve kterém mají všechny elementární jevy stejnou pravděpodobnost, neexistují dva netriviální nezávislé jevy. Za triviální jevy označujeme jevy $\emptyset$ a Ω . [4]

Příklad 23. Nechť π je permutace množiny $\{1, \dots, n\}$ vybraná uniformně náhodně z množiny S_n všech takových permutací. Označme jako $X(\pi)$ počet pevných bodů π , tedy počet $i \in \{1, \dots, n\}$ s $\pi(i) = i$. Určete $\mathbb{E}[X]$. [3]

Příklad 24. Dokažte, že v konečném pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) platí $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$ pro každou náhodnou veličinu X na Ω . Jako $\mathbb{E}[X^2]$ značíme výraz $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)^2 P(\{\omega\})$. [4]

Hint: Dokažte $0 \leq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

7 Zadáno 4. 1. 2021 (Termín odevzdání 18. 1. 2021)

Příklad 25. Určete distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl Poissonova rozdělení, což je rozdělení náhodné veličiny X , která nabývá hodnot $k = 0, 1, \dots$ s pravděpodobnostmi $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, kde $\lambda > 0$. [4]

Hint: Při počítání se může hodit vědět, že $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X]$ a $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Příklad 26. Mějme posloupnost $X_1, X_2, \dots$ nezáporných náhodných veličin takových, že $\mathbb{E}[X_n]$, $\text{Var}[X_n] > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}[X_n]}{\mathbb{E}[X_n]^2} = 0.$$

Dokžte, že

[4]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n > 0) = 1.$$

Hint: Čebyševova nerovnost.

Příklad 27. Jako kovarianci dvou náhodných veličin X a Y označme

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

(rozmyslete si, že uvedený vztah skutečně platí). Dokažte, že pro náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ platí [3]

$$\text{Var} \left[\sum_{i=1}^n X_i \right] = \sum_{i=1}^n \text{Var}[X_i] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \text{Cov}[X_i, X_j].$$