(1)

26/11

$G = (V, E)$ graf

$v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_n$ je **sled** if $(\forall i)\ e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$

tah if sled a $e_i \neq e_j$

cesta if tah a $v_i \neq v_j$

uzavřený: $v_n = v_1$

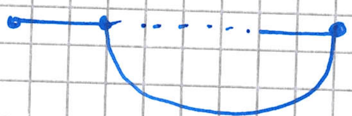
eulerovský: uzavřený tah obsahující každou hranu právě jednou a obs. všechny vrcholy.

Věta. G má eulerovský tah $\Leftrightarrow$ souvislý, sš. stupně uzlů

D. (1) $\Rightarrow$ " $\exists$ mezi dvěma vrcholy existuje sled $\Rightarrow$ mezi nimi existuje cesta.

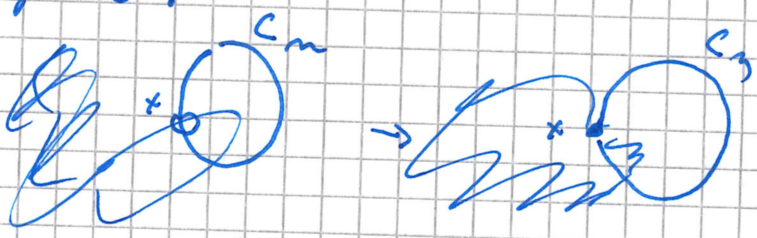
(2) $\Leftarrow$ " **Lemma.** G má sš. stupně uzlů $\Rightarrow$ $E(G)$ je disj. sjednocení cyklů:

(a) **stačí ukázat**: G má cyklus:



$\boxtimes$

Dále: disjunktní cykly lze poskládat do uzavřeného tahu: indukcí dle počtu cyklů:



$\boxtimes$

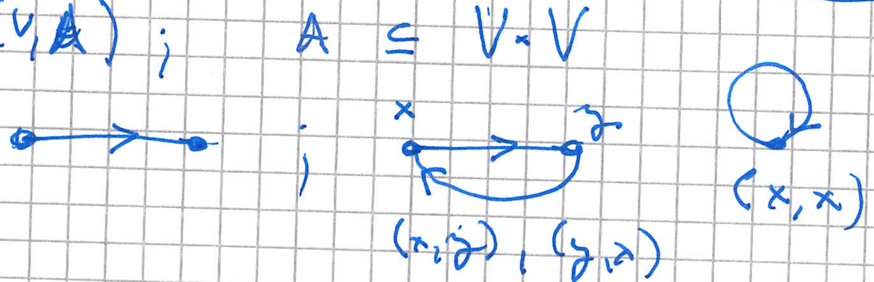
Dává i **dobrý algoritmus** [lepší než $2^{|V|}$]

Ham. kružnice, problém obch. cestujícího NE alg.

② Eulerovské orientované grafy

26/11

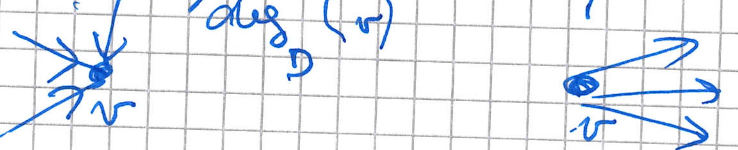
$D = (V, A)$; $A \subseteq V \times V$



$\underline{G(D)}$: graf vzniklý z D tím že zapomeneme násobné hrany a smyčky

Věta. Orientovaný graf $D = (V, A)$ je **eulerovský** $\Leftrightarrow$ $G(D)$ souvislý a $(\forall v \in V)\left(\cancel{\text{indeg}}_D(v) = \cancel{\text{outdeg}}_D(v)\right)$.

$\deg^+_D(v)$ $\qquad$ $\deg^-_D(v)$



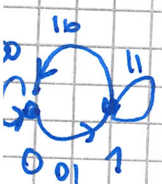
Důkaz: stejně! ☒

Aplikace $k \geq 1$ Nalezněte co nejdelší cyklickou posl. 0,1 aby žádné dvě ~~stejné~~ ~~ott~~ {k-tice po sobě jdoucích cifer} nebyly stejné [označ $u(k)$]

Věta $k \geq 1 \Rightarrow u(k) = 2^k$.

(a) $\leq$: # k-tice je 2^k

(b) def. or. graf $D = (V, A)$: V : všechny $(k-1)$-tice $[|V| = 2^{k-1}]$



(c) or. hrany : $\bullet \longrightarrow \bullet$ $\quad |A| = 2^k$.

$(a_1 \cdots a_{k-1}) \quad (a_2 \cdots a_k)$

vš. spojeno do $(0 \cdots 0)$

$\deg^-(v) = \deg^+(v) = 2$

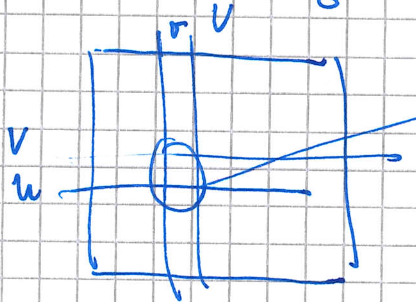
$G(D)$ souvislý (DOMA)

De Bruijnovy grafy

$e_1, \dots, e_k$ posloupnost hran v eulerovském tahu

③ (26/11)

$G = (V, E)$ A_G: matice sousednosti

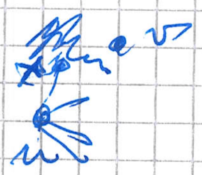


$$A_G(u,v) = \begin{cases} 1 & \{u,v\} \in E \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$\boxed{\text{symetrická}}$

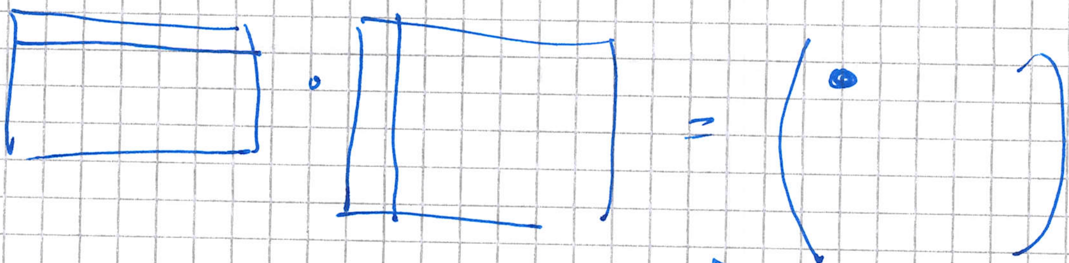
<u>Věta</u>. Počet sledů délky k mezi u, v je $(A_G^k)_{uv}$.

<u>Důkaz</u>. indukcí dle k.



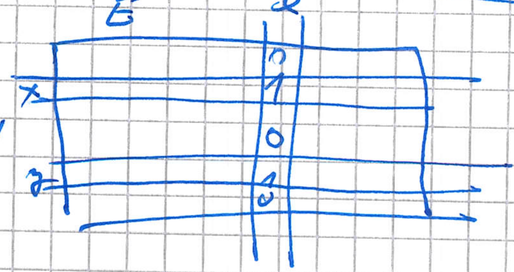
(a) $k = 1 \Rightarrow$ ✓

(b) $$(A_G^{k+1})_{uv} = \sum_{x \in V} (A_G)_{ux} (A_G^k)_{xv}$$



<u>Matice incidence</u> I_G

$e = \{x, y\}$



<u>Věta</u>. $$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

<u>důkaz</u>. obě se rovnají součtu prvků v I_G.

<u>Obarvení k barvami</u> je

$f: V \to \{0, \dots, k-1\}$ že

$\forall e \in E, e = \{u, v\} \Rightarrow f(u) \neq f(v)$.

<u>Barevnost</u> G: nejmenší k že existuje obarvení k barvami. $\boxed{\chi(G) \leq k}$

Věta Počet obarvení k barvami je

$$\sum_{E' \subseteq E} (-1)^{|E'|} k^{c(E')}$$

; $c(E') = \#$ komponent (V, E')

Chromatický polynom G

$$M(G, k) = \sum_{E' \subseteq E} (-1)^{|E'|} k^{c(E')}.$$

<u>Důkaz.</u> <u>PIE</u>: Označme, pro $e \in E, e = \{u, v\}$

$A_e = \{f: V \to \{0, \dots, k-1\}$
$f(u) = f(v)\}$.

$$M(G, k) = k^{|V|} - \left|\bigcup_{e \in E} A_e\right|.$$

$$\left|\bigcap_{e \in E'} A_e\right| = |\{f: V \to \{0, \dots k-1\};$$ každá hrana $e \in E'$ je monochromatická $\}| =$

$$= k^{c(E')}.$$

E':

$\square$

<u>Věta.</u> $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

důkaz: obarvuj hladově podle lib. uspoř.