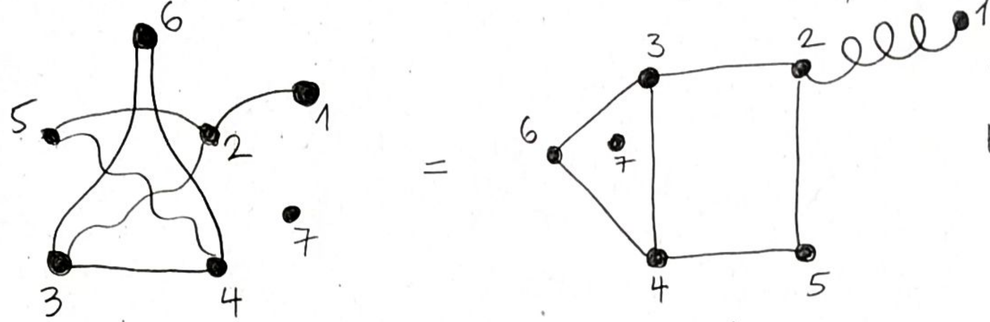
GRAFY (přednáška DM, 19. 11. 19)

Def. Graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je množina (prvkům říkáme vrcholy), $V \neq \emptyset$ a $E \subseteq \binom{V}{2}$. (prvkům říkáme hrany).

Pokud není řečeno jinak, V je konečná.

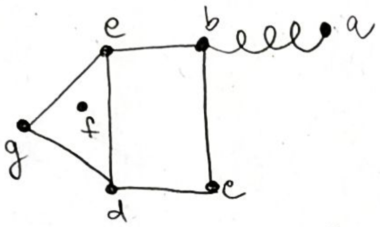
Setkáme se se značením $G = (V, E)$, $V(G)$, $E(G)$.

Př.



$V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{2,5\}, \{3,6\}, \{4,6\}\}$

Různá nakreslení stejného grafu G!



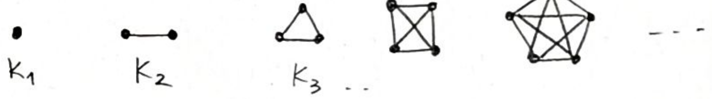
Toto je graf jiný, ale izomorfní s G.

Def: Grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou izomorfní pokud existuje bijekce $f: V \to V'$ t. ž.
$$\{x, y\} \in V \iff \{f(x), f(y)\} \in V'.$$

Bestiář grafů

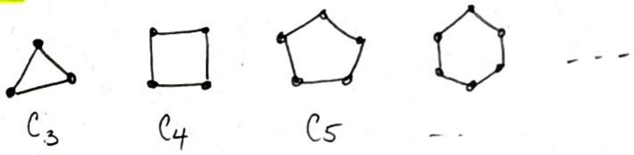
Def.

- Úplný graf K_n $(n \geq 1)$: $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \binom{V}{2}$



K_1 K_2 K_3 ..

- Kružnice C_n $(n \geq 3)$: $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ $E = \{\{i, i+1\} ; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{1, n\}\}$

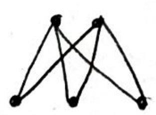


C_3 C_4 C_5 ..

- Cesta P_n (délky n) $(n \geq 0)$ $V = \{0, \ldots, n\}$ $E = \{\{i-1, i\} : i = 1, \ldots, n\}$

P_4

- Úplný bipartitní $K_{n,m}$ $(n, m \geq 1)$ $V = \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{v_1, \ldots, v_m\}$
$E = \{\{u_i, v_j\} ; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$



$K_{2,3}$

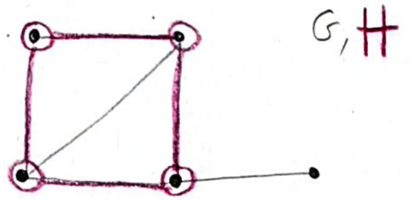
(Pozn: G je bipartitní, pokud $V = U \cup W$ t. ž. $U \cap W = \emptyset$ a každá hrana vede z U do W

Další pojmy

Def. H je podgrafem grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$.

H je indukovaným podgrafem G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$.

Př.



H je podgrafem G, ale ne indukovaným.

Def. Cesta v grafu G je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_t, v_t)$, kde $v_0, v_1, \dots, v_t$ jsou různé vrcholy G a $\forall i \quad e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$. (zde $t \geq 0$)

Kružnice v grafu G je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_t, v_0)$ kde $v_0, \dots, v_t$ různé vrcholy a $\forall i \quad e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E$ a $e_t = \{v_{t-1}, v_0\} \in E$.

G je souvislý, pokud $\forall u, v \in V(G) \; \exists$ cesta z u do v.

👁: Relace $\sim$ definovaná na $V(G)$ takto: $u \sim v \iff$ z u do v vede v G cesta.
je ekvivalence.

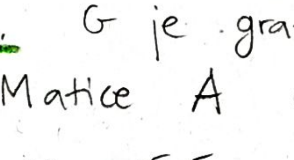
Def. Komponenty souvislosti G jsou třídy této ekvivalence.

Def. Nechť G je souvislý graf. Pro $u, v \in V(G)$ definujeme $d_G(u,v)$ jako délku nejkratší cesty z u do v v G.
d_G = vzdálenost u a v v G.

d_G je příkladem tzv. metriky ...

Reprezentace grafů

Def. G je graf a $\{v_1, \dots, v_n\}$ jeho (nějak seřazené) vrcholy.
Matice A definovaná jako $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \{v_i, v_j\} \notin E(G) \\ 1 & \{v_i, v_j\} \in E(G) \end{cases}$
se nazývá matice sousednosti



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(Někdy se používají jiné způsoby, např. matice incidence)

Stupeň vrcholu

Def. Nechť $u \in V(G)$. Pak $\deg_G(u)$ označuje počet hran, které končí v u. Nazývá se **stupeň vrcholu** u.

: $$\sum_{u \in V(G)} \deg_G(u) = 2|E(G)|.$$

Dk. Počítáme dvěma způsoby počet dvojic (e, u) t.ž. $e \in E$, u je konec e. ∎

: Vrcholů lichého stupně je sudý počet.

Eulerovské grafy

Je možno G nakreslit jedním uzavřeným tahem (každou hranu použijeme právě jednou)?

aplikace: (určování DNA z fragmentů ...)

t.j. existuje posloupnost $(v_0, e_1, v_1, \dots, v_{m-1}, e_m, v_0)$ t.ž. $v_0, \dots, v_{m-1}$ jsou vrcholy (ne nutně různé), $\forall i \; \{v_i, v_{i+1}\} = e_{i+1}$ a $e_1, \dots, e_m$ jsou navzájem různé a $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. ?

uzavřený eulerovský tah

Def.: G je eulerovský pokud má eulerovský tah.

$\boxed{\text{Věta:}}$ G je eulerovský $\iff$ souvislý a každý vrchol má sudý stupeň.

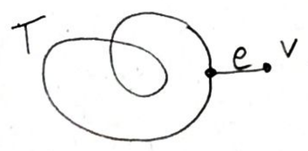
Dk. $\Rightarrow$: Souvislost jasná.
Sudé stupně:

← eul. tah.
zakroužkované výskyty téhož vrcholu.

$\Leftarrow$: Nechť G souvislý, všechny stupně sudé.
$T = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_m, v_m)$ je tah (ne nutně uzavřený) maximální možné délky.

- Pokud $v_0 \neq v_m$: v_0 má lichý počet hran z T
  $\Rightarrow \exists\, e$ nepoužitá v T, s koncem v_0. $\Rightarrow$ T možno prodloužit. ↯

- $v_0 = v_m$. Pokud $\exists\, v \in V$, $v \notin \{v_0, \dots, v_m\}$.



$\exists$ hrana e, spojuje v s T. $\Rightarrow T$ možno prodloužit ↯.

- $v_0 = v_m$ a všechny vrcholy V použity. Pokud $\exists$ hrana e nepoužitá.

$\Rightarrow$ možno prodloužit T. ↯