Princip Inkluze a Exkluze

$$\left|\bigcup_{1}^{n} A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

Důkazy

① indukcí $\left|\bigcup_{1}^{n} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right| =$

$\left|\bigcup_{1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right| =$

$\left|\bigcup_{1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\bigcup_{1}^{n-1} (A_i \cap A_n)\right|$. $\boxtimes$

② Kolikrát se libovolný prvek $x \in \bigcup_{1}^{n} A_i$ počítá na pravé straně?

Nechť $x \in \bigcap_{1}^{j} A_i$ a neleží v žádné A_i, $i > j$. Potom x přispívá

$j - \binom{j}{2} + \binom{j}{3} - \dots + (-1)^{j-1}\binom{j}{j}$.

Víme: $(1-1)^j = 1 - \left(j - \binom{j}{2} + \dots + (-1)^{j-1}\binom{j}{j}\right) =$
0. $\boxtimes$

3. důkaz roznásobením

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} \prod_{i \in I} x_i .$$

$A = \bigcup_1^n A_i$ $\quad f_i$: char. fce množiny A_i,

$f_i : A \longrightarrow \{0,1\}$.

- $(\forall a \in A)\left(\prod_{i=1}^{n} (1 - f_i(a)) = 0 \right)$. Tedíž

- $(x_i := f_i(a))$

$$\sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} f_i(a) = 0 \quad \text{Tedíž}$$

- $$0 = \sum_{a \in A} \left[\sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \prod_{I} f_i(a) \right] =$$

$$\sum_{I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|} \Bigg[\underbrace{\sum_{a \in A} \underbrace{\prod_{i \in I} f_i(a)}_{\text{char. fce } |\bigcap_I A_i|}}_{|\bigcap_I A_i|} \Bigg].$$

Pro $I = \emptyset$ máme prázdný součin def. jako 1

$\boxtimes$

ŠATNÁŘKA

$f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ permutace

$i \in n$ je **pevný bod** jestliže

$$f(i) = i.$$

Počet permutací bez pevného bodu

S_n : všechny permutace n

$$A_i = \{\pi \in S_n ; \ \pi(i) = i\} ; \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\overset{def}{=} \check{P}_n = |S_n| - \left|\bigcup_{i}^{n} A_i\right|.$$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! =$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{n!}{k!}$$

$$\check{p}(n) = n! \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)}_{\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{1}{e}}$$

$\frac{1}{e} \to$ Eulerovo číslo

Pravděpodobnost že permutace n nemá pevný bod je $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{e}.$

~~Počet zobrazení~~ $\underline{m^2}$

= Počet zobrazení na. $X \to Y$, $|X| = n$, $|Y| = m$ (4)

$j \in Y \Rightarrow A_j = \{ f : X \to Y \setminus \{j\} \}$.

$$\# = m^n - \left| \bigcup_{i \in Y} A_i \right| =$$

$$m^n - \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \binom{m}{j} (m-j)^n =$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} (m-j)^n}.$$

Další aplikace: (1) chromatický polynom grafu.

(2) Eulerova fce φ

$$\varphi(n) = |\{ m \in \{1, 2, \dots, n\} \,;\, (n, m) = 1 \}|$$

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$$

$$A_i = \{ m \in \{1, 2, \dots, n\} \,;\, p_i \mid m \}.$$

$$\varphi(n) = n - |A_1 \cup \dots \cup A_r|$$

$|A_1 \cap A_2|$ obsahuje právě násobky $p_1 p_2 \Rightarrow$

$$|A_1 \cap A_2| = n / (p_1 p_2) \quad \left| \; n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_1 p_2} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) n \right.$$

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$