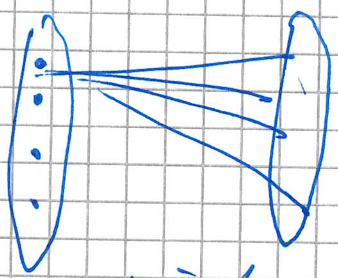
Kombinatorické počítání

① Počet všech zobrazení

$$f : N \to M, \quad |N| = n, \quad |M| = m$$

je m^n. ①

Důkaz.



$$\underbrace{m \cdot m \cdots m}_{n}$$

počet nezávislých výběrů.

ndukcí
lle n

(?) $N = \emptyset$ (?)

$$\emptyset \times \emptyset = \{(u,v);\ u \in \emptyset,\ v \in \emptyset\} = \emptyset$$

Jediné zobrazení $\emptyset \to M$ je $\emptyset$ $\boxtimes$

② $|X| = n \Rightarrow |P(X)| = 2^n$

značení: $P(X) \overset{\text{def}}{=} 2^X$

Tudíž tvrzení $|2^X| = 2^{|X|}$.

Důkaz. ① indukcí

(i) $X = \emptyset \Rightarrow |P(X)| = 1$

(ii) "$n \Rightarrow n+1$"

$$P(X) = \{Y \subseteq X;\ x \notin Y\} \cup \{Y \subseteq X;\ x \in Y\}.$$

$\boxed{\text{2. důkaz}}$

$A \subseteq X \Rightarrow$ definujme $f_A : X \to \{0,1\}$

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$\boxed{\text{charakteristická fce } A}$

~~Počet zobr~~ Zobrazení $F : 2^X \to \{f : X \to \{0,1\}\}$, $F(A) = f_A$
je bijekce.

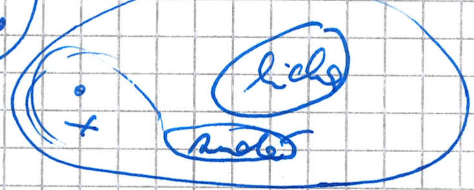
Proto $|2^X| = |\{f : X \to \{0,1\}\}| = 2^{|X|}$!

---

③ Počet podmnožin liché velikosti je stejný jako počet podmnožin sudé velikosti

D: Označ počet lichých podm. L. Potom $L = |\{ A \subseteq X$ [illegible] $\}|$

Nechť $x \in L$.



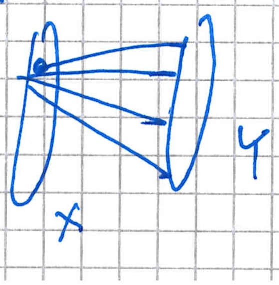
⊠

---

④ Pro $m \geq n$ je přesně

$m(m-1)\ldots(m-n+1)$ prostých $X \to Y$

$|X| = n$, $|Y| = m$



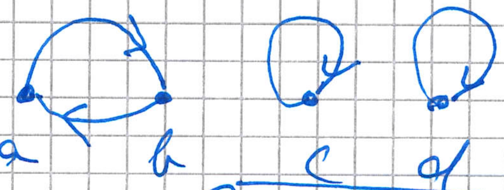
Důsledek. Počet bijekcí je

$n(n-1)\cdots 1 \overset{def}{=} n!$

bijekce konečné množiny $\equiv$ permutace

$\boxed{\text{Zobrazování permutací}}$

1. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$

2. 

cykly permutace

3. $\pi(a) = b,\ \pi(b) = a$

4. $(2\ 1\ 3\ 4)$ pořadí prvků

lineární uspořádání

---

z každého prvku: $\to \circ \to$

$\Rightarrow$ rozklad na orientované cykly.

Binomiální koef. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $[\,n \geq k\,]$

Význam: (a) $\binom{n}{k} = \cancel{\#}\ \#$ k-bodových podmn. X, $|X| = n$

Značení: $\left|\binom{X}{k}\right| = \binom{|X|}{k}$

$\boxed{\text{Důkaz}}$ # usp. k-tic je $n(n-1)\cdots(n-k+1) = k!$

$\|$ # prostých $k \to n$

$\boxtimes$

2. význam

\# nezáporných (celých) řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \dots + x_r = n$$

$$\cdot\cdot \,|\, | \,\cdot\cdot\, | \,\cdot \qquad \binom{r+n-1}{r}$$

Vlastnosti: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Pascalův △

	n
1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4

---

3. význam. $\boxed{\text{Binom. věta}}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Důsl.: $|2^X| = 2^{|X|}$, # sudých = # lichých

Důkaz ~~$(x+y)^n = \sum$~~ $\boxed{\text{indukcí dle } n}$

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n\}} \prod_{i \in A} x_i \prod_{i \notin A} y_i \qquad ☒$$