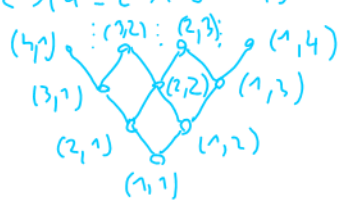
ČÁSTEČNÁ USPOŘÁDÁNÍ:

- Z MINULA ZNÁME DVA UŽITEČNÉ PŘÍKLADY SPECIÁLNÍCH TYPŮ RELACÍ A TO FUNKCE A EKVIVALENCE
- NYNÍ SI UVEDEME TŘETÍ PŘÍKLAD, KTERÝM ZACHYTÍME POJEM USPOŘÁDÁNÍ
- **(ČÁSTEČNÉ) USPOŘÁDÁNÍ** NA MNOŽINĚ **X** JE RELACÍ **R** NA X, KTERÁ JE REFLEXIVNÍ, ANTISYMETRICKÁ A TRANZITIVNÍ
  - PÁR (X,R) SE PAK NAZÝVÁ **ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÁ MNOŽINA** (ANGLICKY ZKRÁCENĚ „POSET")
  - TYPICKY ZNAČÍME SYMBOLY $\leq$, $\preccurlyeq$
- PRO USPOŘÁDÁNÍ $\preccurlyeq$ LZE ZAVÉST **OSTRÉ USPOŘÁDÁNÍ** $\prec$, KDE $x \prec y \Leftrightarrow (x \preccurlyeq y \wedge x \neq y)$
  ↳ NENÍ REFLEXIVNÍ
- PŘÍKLADY USPOŘÁDÁNÍ:
  1) $(\mathbb{N}, \leq)$ - OBVYKLÉ USPOŘÁDÁNÍ PŘIROZENÝCH ČÍSEL PODLE VELIKOSTI
     - TOTO JE PŘÍKLAD **LINEÁRNÍHO USPOŘÁDÁNÍ** = ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ **R** NA **X** TAKOVÉ, ŽE PLATÍ $\forall x,y \in X: xRy \vee yRx$
     - LINEÁRNÍ USPOŘÁDÁNÍ SE NĚKDY NAZÝVÁ **ÚPLNÁ USPOŘÁDÁNÍ**
  2) RELACE DIAGONÁLY $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$ NA MNOŽINĚ X
     - NENÍ LINEÁRNÍ (EXISTUJÍ **NESROVNATELNÉ PRVKY** - $x \not\preccurlyeq y \wedge y \not\preccurlyeq x$)
  3) USPOŘÁDÁNÍ INKLUZÍ $(2^X, \subseteq)$ MNOŽINY **X**
     - NENÍ LINEÁRNÍ PRO $|X| \geq 2$
- JAKOŽTO RELACE LZE USPOŘÁDÁNÍ ZNÁZORŇOVAT VÝČTEM PRVKŮ, ORIENTOVANÝM GRAFEM ČI MATICÍ SOUSEDNOSTI
- PROTOŽE SE VŠAK JEDNÁ O SPECIÁLNÍ TYP RELACÍ, EXISTUJE ČTVRTÝ, ÚSPORNĚJŠÍ ZPŮSOB ZNÁZORNĚNÍ
- **HASSEŮV DIAGRAM** = ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANOU MNOŽINU $(X, \preccurlyeq)$ ZNÁZORNÍME BODY V ROVINĚ, KDE PRO $x \prec y$ PRVEK x LEŽÍ POD y A MEZI x A y NAKRESLÍME ČÁRU $\Leftrightarrow \nexists z \in X : x \prec z \prec y$ (TEDY JE-LI x **BEZPROSTŘEDNÍ PŘEDCHŮDCE** y V $\preccurlyeq$)

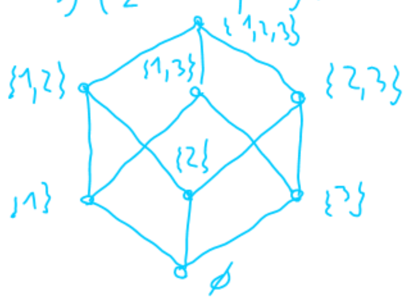
- PŘÍKLADY HASSEOVÝCH DIAGRAMŮ:

1) $(\mathbb{N}, \leq)$:

2) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \preccurlyeq)$, KDE $(a,b) \preccurlyeq (c,d) \Leftrightarrow (a \leq c \wedge b \leq d)$



3) $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$:



- MÁME-LI USPOŘÁDÁNÍ $\preceq$ NA X, MŮŽEME ROZLIŠIT SPECIÁLNÍ PRVKY Z X
- V ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÉ MNOŽINĚ $(X, \preceq)$ JE PRVEK $a \in X$:
  1) MAXIMÁLNÍ, POKUD $\nexists x \in X : a \prec x$
  2) MINIMÁLNÍ, POKUD $\nexists x \in X : x \prec a$
  3) NEJVĚTŠÍ, POKUD $\forall x \in X : x \preceq a$
  4) NEJMENŠÍ, POKUD $\forall x \in X : a \preceq x$
- PLATÍ, ŽE KAŽDÝ NEJVĚTŠÍ PRVEK JE MAXIMÁLNÍ A KAŽDÝ NEJMENŠÍ PRVEK JE MINIMÁLNÍ
  - OBRÁCENĚ TO OVŠEM NEPLATÍ! (MŮŽE NAPŘÍKLAD EXISTOVAT MAXIMÁLNÍ PRVEK, KTERÝ NENÍ NEJVĚTŠÍ)

- NYNÍ SI UKÁŽEME ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI ČÁSTEČNÝCH USPOŘÁDÁNÍ
- VĚTA 1:
  KAŽDÁ NEPRÁZDNÁ KONEČNÁ ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÁ MNOŽINA $(X, \preceq)$ MÁ ALESPOŇ JEDEN MINIMÁLNÍ PRVEK.
  - PRO NEKONEČNÉ MNOŽINY PLATIT NEMUSÍ - VIZ $(\mathbb{Z}, \leq)$
  - ANALOGICKÉ TVRZENÍ PLATÍ PRO MAXIMÁLNÍ PRVEK
- <u>DK</u>:
  - PRO $x \in X$ DEFINUJME $L_x = \{y \in X : y \preceq x\}$
  - POTOM PRO $x, y \in X$, $x \preceq y$ PLATÍ $L_x \subseteq L_y$ – Z TRANZITIVITY
  - ZVOLME $a \in X$ TAKOVÉ, ABY L_a MĚLA NEJMENŠÍ MOŽNÝ POČET PRVKŮ
    - TAKOVÉ a EXISTUJE, PROTOŽE X JE KONEČNÁ
  - POKUD $|L_a| > 1$, PAK $\exists y \in L_a : y \neq a$
    - PAK ALE $L_y \subsetneq L_a$ A TEDY $|L_y| < |L_a|$, COŽ NENASTANE KVŮLI NAŠÍ VOLBĚ PRVKU a
      $a \notin L_y$, PROTOŽE $a \neq y$
  - TAKŽE $|L_a| = 1$ A TEDY $L_a = \{a\}$, NEBOLI a JE MINIMÁLNÍM PRVKEM $\boxtimes$

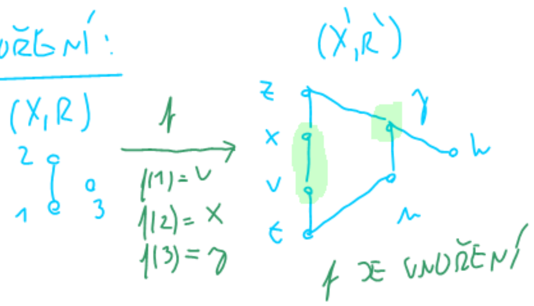
- VÍME, ŽE NE KAŽDÉ USPOŘÁDÁNÍ JE LINEÁRNÍ
- KAŽDÉ USPOŘÁDÁNÍ ALE LZE NA LINEÁRNÍ ROZŠÍŘIT
- VĚTA 2:
  PRO KAŽDOU KONEČNOU ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANOU MNOŽINU (X, R) EXISTUJE LINEÁRNÍ USPOŘÁDÁNÍ S MNOŽINY X TAKOVÉ, ŽE PLATÍ $R \subseteq S$
  NEBOLI R OBSAHUJE S CHÁPEME-LI TATO USPOŘÁDÁNÍ JAKO MNOŽINY DVOJIC Z $X \times X$
  - PLATÍ I PRO NEKONEČNÉ MNOŽINY, ALE PRO NĚ SE JEDNÁ O JEDEN Z AXIOMŮ TEORIE MNOŽIN

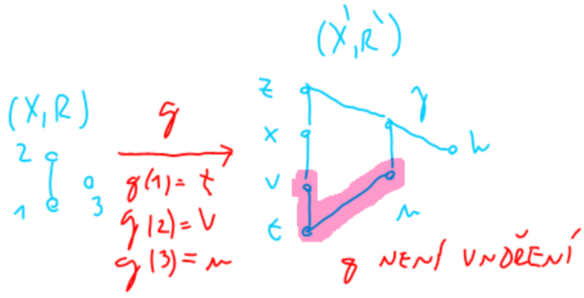
- OK:
  - INDUKCÍ PODLE $|X|$
  - ZAČÁTEK INDUKCE:
    - PRO $|X|=1$ MÁME $R = \Delta_X$ A STAČÍ POLOŽIT $S = R$
  - INDUKČNÍ KROK:
    - NECHŤ $|X|>1$ A NECHŤ TVRZENÍ PLATÍ PRO ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÉ MNOŽINY VELIKOSTI $|X|-1$
    - PODLE VĚTY 1 EXISTUJE V X MINIMÁLNÍ PRVEK x_0
      ↳ POUŽIT PŘEDPOKLAD KONEČNOSTI
    - POLOŽME $X' = X \setminus \{x_0\}$ A $R' = R \restriction X' = \{(x,x') \in R : x, x' \in X'\}$
      - ZÚŽENÍ RELACE R NA X'
    - POTOM R' JE ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ NA X'
    - PODLE IP $\exists$ LINEÁRNÍ USPOŘÁDÁNÍ S' NA X' TAKOVÉ, ŽE $R' \subseteq X'$
    - DEFINUJME RELACI S NA X PŘEDPISEM
      $x_0 \, S \, y$ PRO KAŽDÉ $y \in X$
      $x \, S \, y$ KDYKOLIV $x \, S' \, y$
    - POTOM LZE OVĚŘIT, ŽE S JE LINEÁRNÍM USPOŘÁDÁNÍM NA X TAKOVÉ, ŽE $R \subseteq S$ $\boxtimes$

- DÁLE UKÁŽEME, ŽE KAŽDÉ ČÁSTEČNÉ USPOŘÁDÁNÍ LZE VYTVOŘIT POMOCÍ INKLUZE
- K TOMU SI ALE NEJPRVE ZAVEDEME POMOCNÉ POJMY
- NECHŤ (X,R) A (X',R') JSOU ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÉ MNOŽINY, POTOM ZOBRAZENÍ $f: X \to X'$ JE VNOŘENÍM (X,R) DO (X',R'), POKUD PLATÍ

  (i) f JE PROSTÉ,
  (ii) $\forall x,y \in X : x R y \Leftrightarrow f(x) R' f(y)$.
  - VYJADŘUJE SKUTEČNOST, ŽE ČÁST (X',R') VYPADÁ STEJNĚ JAKO (X,R)

- PŘÍKLAD VNOŘENÍ:





- **VĚTA 3**: PRO KAŽDOU ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANOU MNOŽINU $(X, \leq)$ EXISTUJE VNOŘENÍ DO USPOŘÁDANÉ MNOŽINY $(2^X, \subseteq)$
  - TATO VĚTA I JEJÍ DŮKAZ PLATÍ I PRO NEKONEČNÉ MNOŽINY

- DK:
  - DEFINUJME ZOBRAZENÍ $f: X \to 2^X$ PŘEDPISEM $f(x) = \underbrace{\{y \in X : y \preceq x\}}$
  - OVĚŘÍME, ŽE f JE SKUTEČNĚ VNOŘENÍM: V DŮKAZU VĚTY 1 JSME TUTO ZNAČILI JAKO L_x
    - (i) f JE PROSTÉ:
      - NECHŤ $\exists x, y \in X : f(x) = f(y)$
      - MÁME $x \in f(x) = f(y) \Rightarrow x \preceq y$
        $y \in f(y) = f(x) \Rightarrow y \preceq x$ Z REFLEXIVITY

        TEDY $x = y$ Z ANTISYMETRIE $\preceq$

        $\Rightarrow$ f JE PROSTÉ
    - (ii) $x \preceq y \iff f(x) \subseteq f(y)$:   Z TRANZITIVITY $\preceq$ A FAKTU $x \preceq y$
      - a) $\Rightarrow$:
        - NECHŤ $x \preceq y$
        - POTOM PRO $z \in f(x)$ JE $z \preceq x$ A TEDY $z \preceq y$, COŽ IMPLIKUJE $z \in f(y)$

        $\Rightarrow$ $f(x) \subseteq f(y)$
      - b) $\Leftarrow$:
        - NECHŤ $f(x) \subseteq f(y)$
        - POTOM $x \in f(x) \subseteq f(y)$ A TEDY $x \preceq y$

        $\boxtimes$
  - f TAK SPLŇUJE (i) A (ii) A JE TEDY VNOŘENÍM

- UKÁŽEME SI JEŠTĚ JEDEN DŮLEŽITÝ VÝSLEDEK O ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÝCH MNOŽINÁCH
- BUDEME OPĚT NEJDŘÍV POTŘEBOVAT NOVÉ POJMY
- NECHŤ $P = (X, \preceq)$ JE KONEČNÁ ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÁ MNOŽINA
- MNOŽINA $A \subseteq X$ SE NAZÝVÁ **NEZÁVISLÁ** V P, POKUD $\forall x, y \in A: x \neq y \Rightarrow$ NEPLATÍ $x \preceq y$
  - TAKOVÁ MNOŽINA SE NĚKDY NAZÝVÁ **ANTIŘETĚZEC**

  NEBOLI KAŽDÉ 2 RŮZNÉ PRVKY Z A JSOU NEPOROVNATELNÉ
- NECHŤ $\alpha(P) = \max\{|A| : A \text{ NEZÁVISLÁ V } P\}$

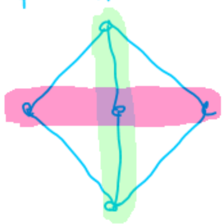
  ↳ TEDY $\alpha(P)$ = MAXIMÁLNÍ DÉLKA ANTIŘETĚZCE V P

- MNOŽINA $R \subseteq X$ SE NAZÝVÁ **ŘETĚZEC** V P, JESTLIŽE $\forall x, y \in R: x \preceq y \vee y \preceq x$

  ↳ TEDY KAŽDÉ 2 PRVKY Z R JSOU POROVNATELNÉ
- NECHŤ $\omega(P) = \max\{|R| : R \text{ JE ŘETĚZEC V } P\}$

- PŘÍKLADY:

$P_1 = (X_1, \preceq_1)$

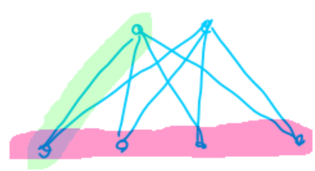


$\alpha(P_1) = 3$

$\omega(P_1) = 3$

$|X| = 5$

$P_2 = (X_2, \preceq_2)$



$\alpha(P_2) = 4$

$\omega(P_2) = 2$

$|X| = 6$

– Z OBRÁZKU JE VIDĚT, ŽE $\alpha(P)$ A $\omega(P)$ LZE POVAŽOVAT ZA „ŠÍŘKU" A „VÝŠKU" P

– **VĚTA 4** (**VĚTA O DLOUHÉM A ŠIROKÉM**):
PRO KAŽDOU KONEČNOU ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANOU MNOŽINU $P = (X, \preceq)$ PLATÍ
$$\alpha(P) \cdot \omega(P) \geq |X|$$

– DK:

– DEFINUJME INDUKTIVNĚ NÁSLEDUJÍCÍ MNOŽINY $X_1, \dots, X_t$:
- $X_1 = \{$MINIMÁLNÍ PRVKY V $P\}$
- MÁME-LI $X_1, \dots, X_\ell$, PAK ZVOLME $X'_\ell = X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{\ell} X_i\right)$
- POKUD $X'_\ell = \emptyset$, PAK ZVOLÍME $t = \ell$ A KONČÍME
- JINAK DEFINUJME $\preceq' = \preceq \restriction X'_\ell$, $X_{\ell+1} = \{$MINIMÁLNÍ PRVKY V $(X'_\ell, \preceq')\}$
  A POKRAČUJEME

– K DOKONČENÍ DŮKAZU OVĚŘÍME NÁSLEDUJÍCÍ SKUTEČNOSTI:
1) $X_1, \dots, X_t$ TVOŘÍ **ROZKLAD** MNOŽINY X (TEDY $X_1, \dots, X_t$ JSOU PO DVOU DISJUNKTNÍ A $X = X_1 \cup \dots \cup X_t$)
2) KAŽDÁ X_i JE NEZÁVISLÁ V P (TEDY $\alpha(P) \geq |X_i|$)
3) $\omega(P) \geq t$

– PODMÍNKY 1), 2), 3) DOKONČUJÍ ÚVAHU: $|X| \overset{1)}{=} |X_1| + \dots + |X_t| \leq t \cdot \max\{|X_i|\} \overset{2),3)}{\leq}$
$\leq \omega(P) \cdot \alpha(P)$

– PODMÍNKY 1) A 2) PLYNOU PŘÍMO Z KONSTRUKCE

– ZBÝVÁ OVĚŘIT PODMÍNKU 3):
- ZPĚTNOU INDUKCÍ
- PRO $i = t, t-1, \dots, 2, 1$ NALEZNEME PRVKY $x_i \in X_i$ TAKOVÉ, ŽE $\{x_1, \dots, x_t\}$ JE ŘETĚZCEM V P
- ZVOLME $x_t \in X_t$ LIBOVOLNĚ
- MĚJME NYNÍ $x_t \in X_t, \dots, x_{k+1} \in X_{k+1}$ TVOŘÍCÍ ŘETĚZEC V P
- PROTOŽE $x_{k+1} \notin X_k$, TAK $\exists\, x_k \in X_k : x_k \prec x_{k+1}$ V X'_k (JINAK JE x_{k+1} MINIMÁLNÍ)
- POTOM $\{x_1, \dots, x_t\}$ SKUTEČNĚ TVOŘÍ ŘETĚZEC $\boxtimes$

– JAKO OKAMŽITOU APLIKACI ZÍSKÁME NÁSLEDUJÍCÍ SLAVNÝ VÝSLEDEK

– **VĚTA 5** (**ERDŐSOVO–SZEKERESOVO LEMMA**):
PRO KAŽDÉ $m \in \mathbb{N}$ KAŽDÁ POSLOUPNOST $s \geq (m-1)^2 + 1$ ČÍSLY OBSAHUJE **MONOTÓNNÍ** (TEDY NEKLESAJÍCÍ ČI NEROSTOUCÍ) **PODPOSLOUPNOST** DÉLKY m.
(POSLOUPNOST, KTERÁ VZNIKNE VYŠKRTÁNÍM NĚKTERÝCH PRVKŮ PŮVODNÍ POSLOUPNOSTI)

– DK:
- PRO POSLOUPNOST $(x_1, \dots, x_{(m-1)^2+1})$ DEFINUJME $X = \{1, \dots, (m-1)^2+1\}$ A RELACI $\preceq$ NA X DEFINOVANOU PŘEDPISEM $i \preceq j \iff (i \leq j \wedge x_i \leq x_j)$
- POTOM $(X, \preceq)$ JE ČÁSTEČNĚ USPOŘÁDANÁ MNOŽINA A PODLE **VĚTY 4** PLATÍ $\alpha(X, \preceq) \cdot \omega(X, \preceq) \geq |X| = (m-1)^2 + 1$ A PROTO $\alpha(X, \preceq) \geq m \vee \omega(X, \preceq) \geq m$
- TEDY $(X, \preceq)$ MÁ BUĎ ANTIŘETĚZEC DÉLKY m $\Rightarrow$ NEROSTOUCÍ PODPOSLOUPNOST DÉLKY m
  NEBO ŘETĚZEC DÉLKY m $\Rightarrow$ NEKLESAJÍCÍ PODPOSLOUPNOST DÉLKY m $\boxtimes$