RELACE NA MNOŽINÁCH:

– za pomocí množin si definujeme nové objekty, které nám pomohou zachycovat vztahy mezi množinami

– v množině nezávisí na pořadí prvků

  – tedy například platí $\{x,y\}=\{y,x\}$ a, pokud $x=y$, pak $|\{x,y\}|=1$

– zavedeme si pojem **uspořádané dvojice** (x,y), kde na pořadí záleží (tedy platí $(a,b)=(c,d) \iff (a=c \wedge b=d)$

↳ značíme kulatými závorkami

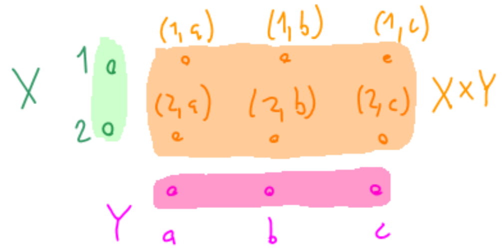
  – uspořádaná dvojice (x,y) se dá zapsat pomocí množin jako $\{\{x\},\{x,y\}\}$

– podobně se definuje **uspořádaná n-tice** prvků $(x_1,\dots,x_n)$ pro každé $n\in\mathbb{N}$

  – takto tedy máme definované posloupnosti

– nechť X,Y jsou množiny, potom jako **kartézský součin** množin X a Y označíme

$$X\times Y=\{(x,y): x\in X, y\in Y\}$$



  – neboli $X\times Y$ je množina obsahující všechny uspořádané dvojice (x,y) s $x\in X$ a $y\in Y$

– pro $X=Y$ se někdy píše $X\times X=X^2$

– dá se rozšířit i na víc množin $X_1\times\dots\times X_n$ pomocí uspořádaných n-tic

– nyní si zavedeme klíčový pojem relace na množině, který zachycuje vztahy mezi množinami – zachycuje funkce, ekvivalence, uspořádání...

  – jedná se o velice obecný pojem

– **(binární) relace** R mezi množinami X a Y je podmnožina kartézského součinu $X\times Y$

  – neboli $R\subseteq X\times Y$

  – v případě $X=Y$ mluvíme o **relaci na X** (pak $R\subseteq X^2$)

  – pokud $(x,y)\in R$, pak říkáme, že **x je v relaci R s y** (píše se xRy)

– Příklady relací (X,R):

  – 1) $(X,R)=(\mathbb{N},|)$ – dělitelnost, tedy $x\,|\,y \iff x$ dělí y

  – 2) $(X,R)=(\mathbb{N},\leq)$ – uspořádání, tedy $x\leq y \iff x$ je nanejvýš y

  – 3) $X=\{$dvojice českých slov$\}$, $xRy \iff x$ je přesmyčkou y

    – například (kavárna slovia, slovní akvaria), (Martin Bačko, obal nakrmit)

– **Značení relací**:

  – a) výčtem prvků $R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,2)\}$

  b) orientovaným grafem –

  – $x \to y \iff (x,y)\in R$

  c) maticí sousednosti –

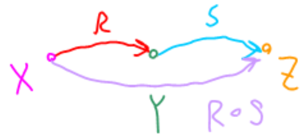
$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

  – 1 na pozicích (x,y) s $(x,y)\in R$, 0 jinak

OPERACE NA RELACÍCH:

- INVERZNÍ RELACÍ K RELACI R JE RELACE $R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\}$
  - TEDY „OTÁČÍME ŠIPKY"
- SLOŽENÍ RELACE R MEZI X A Y S RELACÍ S MEZI Y A Z JE RELACE

  $$R \circ S = \{(x,z) \in X \times Z : \exists y \in Y,\ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S\}$$



  - JE ASOCIATIVNÍ, ALE NE KOMUTATIVNÍ

- NYNÍ UKÁŽEME SPECIÁLNÍ TYPY RELACÍ, KTERÉ ODPOVÍDAJÍ ZNÁMÝM MATEMATICKÝM OBJEKTŮM

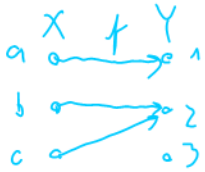
FUNKCE:

- JAKO FUNKCI (NEBO TAKÉ ZOBRAZENÍ) Z X DO Y OZNAČÍME RELACI $f \subseteq X \times Y$ TAKOVOU, ŽE PLATÍ $\forall x \in X\ \underbrace{\exists!}_{=\text{„EXISTUJE PRÁVĚ JEDNU"}} y \in Y : x f y$
  - NEBOLI KAŽDÝ PRVEK Z X SE PŘES f ZOBRAZÍ NA PRÁVĚ JEDNO y (KAŽDÝ PRVEK DEFINIČNÍHO OBORU f MÁ PRÁVĚ JEDEN OBRAZ)
- ZNAČENÍ:

  $f : X \to Y$ ODPOVÍDÁ VÝRAZU $f \subseteq X \times Y$, X = DEFINIČNÍ OBOR, Y = OBOR HODNOT

  $f(x) = y$ ODPOVÍDÁ VÝRAZU $(x,y) \in f$ NEBOLI $x f y$

- PŘÍKLADY FUNKCÍ:
  - 1) $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$

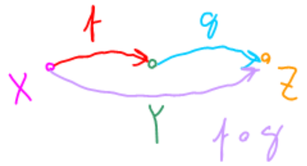


  - 2) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ (TEDY $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$)
  - 3) $X = \mathbb{R}$, $Y = [-1,1]$. $f : \mathbb{R} \to [0,1]$, $f(x) = \sin(x)$ (TEDY $f = \{(x, \sin(x)) : x \in \mathbb{R}\}$)
- CHÁPÁNÍ FUNKCÍ JAKO SPECIÁLNÍCH TYPŮ RELACÍ JE POMĚRNĚ NOVÝ VYNÁLEZ

SKLÁDÁNÍ FUNKCÍ:

- FUNKCE SE SKLÁDAJÍ STEJNĚ JAKO RELACE, ALE POUŽÍVÁ SE JINÉ ZNAČENÍ!
- SLOŽENÍM FUNKCÍ $f : X \to Y$ A $g : Y \to Z$ JE FUNKCE $g \circ f : X \to Z$ DANÁ PŘEDPISEM $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

  OPAČNÉ POŘADÍ NEŽ U SKLÁDÁNÍ RELACÍ!



- JE ASOCIATIVNÍ, ALE NE KOMUTATIVNÍ

- **DŮLEŽITÉ DRUHY FUNKCÍ**:
  - FUNKCE $f: X \to Y$ JE
    - a) **PROSTÁ** (NEBOLI **INJEKTIVNÍ**), POKUD $\forall x, x' \in X: x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
      - NEBOLI DVA RŮZNÉ PRVKY SE NEZOBRAZÍ NA TENTÝŽ OBRAZ

- TOTO JE ZAKÁZÁNO

      - DO KAŽDÉHO $y \in Y$ VEDE ≤ 1 ŠIPKA
    - b) **NA** (NEBOLI **SURJEKTIVNÍ**), POKUD $\forall y \in Y \, \exists x \in X: f(x) = y$
      - NEBOLI NA KAŽDÝ PRVEK Z Y JE OBRAZEN NĚJAKÝ PRVEK Z X
      - DO KAŽDÉHO $y \in Y$ VEDE ≥ 1 ŠIPKA
    - c) **VZÁJEMNĚ JEDNOZNAČNÁ** (NEBOLI **BIJEKTIVNÍ**), POKUD JE PROSTÁ A NA
      - NEBOLI f PRVKY X A Y „SPÁRUJE"
      - DO KAŽDÉHO $y \in Y$ VEDE PRÁVĚ 1 ŠIPKA
- CVIČENÍ - DOKAŽTE, ŽE PRO KONEČNÉ X JE FUNKCE $f: X \to X$ PROSTÁ $\Leftrightarrow$ f JE NA
  - PLATÍ TOTO TVRZENÍ I PRO NEKONEČNÉ X?
- S TĚMITO DRUHY FUNKCÍ LZE ZAVÉST POJEM **MOHUTNOSTI** (**KARDINALITY**) I PRO NEKONEČNÉ MNOŽINY
- NECHŤ X, Y JSOU MNOŽINY (I NEKONEČNÉ), POTOM:
  - X MÁ **NANEJVÝŠ ROVNOU MOHUTNOST** JAKO Y ($X \preceq Y$), POKUD $\exists$ PROSTÉ $f: X \to Y$
  - X MÁ **STEJNOU MOHUTNOST** JAKO Y ($X \approx Y$), POKUD $\exists$ BIJEKTIVNÍ $f: X \to Y$
  - POKUD $X \preceq Y \wedge X \not\approx Y$, PAK PÍŠEME $X \prec Y$
  - **CANTOROVA-BERNSTEINOVA VĚTA**:

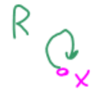
    $$\forall X, Y: X \preceq Y \wedge Y \preceq X \Rightarrow X \approx Y$$

    - POKUD $\exists$ PROSTÁ ZOBRAZENÍ $f: X \to Y$ A $g: Y \to X$, PAK $\exists$ BIJEKCE $h: X \to Y$
    - NAPŘÍKLAD $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q}$ - VIZ HILBERTŮV HOTEL
    - BEZ DŮKAZU
  - **CANTOROVA VĚTA**:

    $$\forall X: X \prec P(X)$$

    - POTENČNÍ MNOŽINA MÁ OSTŘE VĚTŠÍ MOHUTNOST NEŽ PŮVODNÍ MNOŽINA
    - PLATÍ $\mathbb{N} \prec 2^{\mathbb{N}} \approx \mathbb{R}$
    - TEDY $\exists$ RŮZNĚ VELKÁ NEKONEČNA
    - BEZ DŮKAZU (CANTOROVA DIAGONÁLNÍ METODA)
  - POKUD MNOŽINA X SPLŇUJE $X \preceq \mathbb{N}$, PAK JE X **SPOČETNÁ**
    - NAPŘÍKLAD $X = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
    - JINAK JE X **NESPOČETNÁ**
    - NAPŘÍKLAD $X = \mathbb{R}$

- ROZLIŠÍME JEŠTĚ ČTYŘI DRUHY RELACÍ, KTERÉ NÁM UMOŽNÍ DEFINOVAT DALŠÍ MATEMATICKÉ OBJEKTY JAKO EKVIVALENCE ČI USPOŘÁDÁNÍ
- RELACE **R** NA MNOŽINĚ **X** JE:
  - a) **REFLEXIVNÍ**, POKUD $\forall x \in X: xRx$
    - NEBOLI KAŽDÝ PRVEK JE V RELACI SÁM SE SEBOU

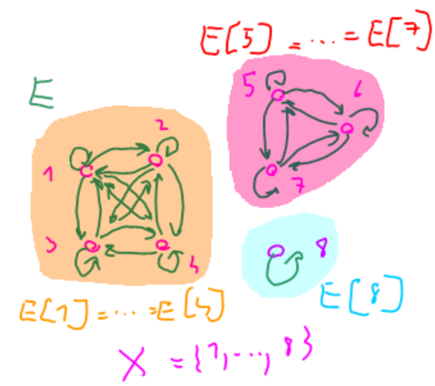


  - b) **SYMETRICKÁ**, POKUD $\forall x, y \in X: xRy \Rightarrow yRx$
    - JE-LI X V RELACI S Y, POK JE I Y V RELACI S X

  - c) **ANTISYMETRICKÁ**, POKUD $\forall x, y \in X: xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$
    - JSOU-LI X A Y V „OBOUSMĚRNÉ" RELACI, PAK SE ROVNAJÍ

  - d) **TRANZITIVNÍ**, POKUD $\forall x, y, z \in X: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
    - JE-LI X V RELACI S Y A Y JE V RELACI SE Z, PAK X JE V RELACI SE Z

- **EKVIVALENCE**:
  - NYNÍ MŮŽEME DEFINOVAT RELACI EKVIVALENCE, KTERÁ SLOUŽÍ K ZACHYCENÍ POJMU PODOBNOSTI MEZI MNOŽINAMI
  - RELACE **E** NA MNOŽINĚ **X** JE EKVIVALENCÍ, JE-LI REFLEXIVNÍ, SYMETRICKÁ A TRANZITIVNÍ
  - ZPRAVIDLA SE ZNAČÍ SYMBOLY $=, \approx, \equiv, \simeq, \dots$
  - EKVIVALENCE E ROZDĚLUJE X NA **TŘÍDY EKVIVALENCE** - PRO $x \in X$ JE TŘÍDOU EKVIVALENCE OBSAHUJÍCÍ x MNOŽINA **$E[x]$** $= \{ y \in X : xEy \}$
  - PŘÍKLADY EKVIVALENCÍ:
    1) $(\mathbb{N}, =)$ - RELACE ROVNOSTI NA $\mathbb{N}$
       - TŘÍDY EKVIVALENCE JSOU JEDNOPRVKOVÉ
    2) $(\mathbb{Z}, \equiv)$ - RELACE KONGRUENCE MODULO p, $x \equiv y \pmod{p} \Leftrightarrow p \mid x - y$
       - TŘÍDY EKVIVALENCE JSOU MNOŽINY CELÝCH ČÍSEL SE STEJNÝM ZBYTKEM PŘI DĚLENÍ p (ZBYTKOVÉ TŘÍDY)
    3) PŘESMYČKY Z ÚVODNÍHO PŘÍKLADU RELACÍ



TVRZENÍ: NECHŤ E JE EKVIVALENCÍ NA MNOŽINĚ X. POTOM PLATÍ:

a) $\forall x \in X : E[x] \neq \emptyset$

b) $\forall x, y \in X : E[x] = E[y]$ NEBO $E[x] \cap E[y] = \emptyset$

c) TŘÍDY EKVIVALENCE JEDNOZNAČNĚ URČUJÍ RELACI E

DŮK:

a) E JE REFLEXIVNÍ $\Rightarrow xEx \Rightarrow x \in E[x] \Rightarrow E[x] \neq \emptyset$

b) ROZLIŠÍME 2 PŘÍPADY:

(i) NECHŤ xEy:

- POTOM $E[x] \subseteq E[y]$, PROTOŽE $z \in E[x] \overset{\text{DEFINICE } E[x]}{\Rightarrow} xEz \overset{\text{SYMETRIE } E}{\Rightarrow} zEx \Rightarrow$

$\underset{\text{TRANZITIVITA } E}{\Rightarrow} zEy \underset{\text{SYMETRIE } E}{\Rightarrow} yEz \underset{\text{DEFINICE } E[y]}{\Rightarrow} z \in E[y]$

- ZE SYMETRIE PLATÍ yRx A TEDY $E[y] \subseteq E[x]$

$\Rightarrow \underline{\underline{E[x] = E[y]}}$

(ii) NECHŤ NEPLATÍ xEy:

- UKÁŽEME $E[x] \cap E[y] = \emptyset$
- SPOREM. NECHŤ $\exists z \in E[x] \cap E[y]$
- POTOM $xEz \wedge \underset{\text{SYMETRIE } E}{zEy}$ A TEDY $\underset{\text{TRANZITIVITA } E}{xEy}$ $\Rightarrow$ <u>SPOR</u>

c) CHCEME PRO EKVIVALENCE E A E' UKÁZAT: $(\forall x \in X : E[x] = E'[x]) \Rightarrow$

$\Rightarrow E = E'$

- TO PLATÍ, PROTOŽE TŘÍDY $E[x]$ URČUJÍ E VZTAHEM $xEy \Leftrightarrow \{x, y\} \subseteq E[x]$

$\blacksquare$