BARVENÍ ROVINNÝCH GRAFŮ:

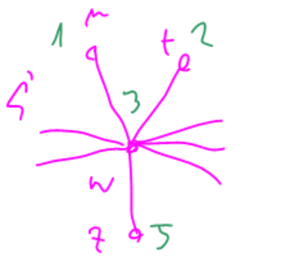
- **VĚTA** (VĚTA O 5 BARVÁCH): KAŽDÝ ROVINNÝ GRAF $G=(V,E)$ LZE OBARVIT 5 BARVAMI
  - DK:
    - INDUKCÍ PODLE $|V|$
    - ZAČÁTEK INDUKCE – $|V| \le 5$ – TRIVIÁLNÍ
    - INDUKČNÍ KROK – NECHŤ $|V| \ge 6$
    - NECHŤ JE MINIMÁLNÍ STUPEŇ ≥ 5 (JINAK LZE ODEBRAT VRCHOL V STUPNĚ ≤ 4, OBARVIT $G-V$ Z IP A POTÉ VHODNĚ OBARVIT V)
    - PROTOŽE $|E| \le 3|V|-6$, TAK $\exists\, v \in V$ STUPNĚ 5 A PROTOŽE K_5 NENÍ ROVINNÝ, TAK $\exists$ JEHO SOUSEDÉ x A y S $\{x,y\} \notin E$
    - NECHŤ t, u, z JSOU ZBYLÍ SOUSEDÉ VRCHOLU v
    - NECHŤ JE G' GRAF VZNIKLÝ Z G KONTRAKCÍ HRAN $\{x,v\}$ A $\{y,v\}$ A w VZNIKLÝ VRCHOL

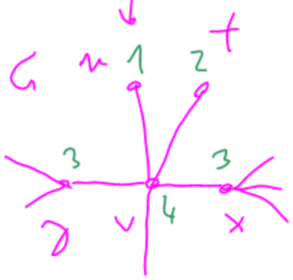
      ↳ SLEPENÍ KONCŮ HRAN A ODSTRANĚNÍ VZNIKLÝCH NÁSOBNÝCH HRAN A SMYČEK

    - POTOM G' JE STÁLE ROVINNÝ
    - IP $\Rightarrow$ $\exists$ OBARVENÍ c' GRAFU G' PĚTI BARVAMI
    - DEFINUJME OBARVENÍ c GRAFU G 5 BARVAMI NÁSLEDOVNĚ:

$$c(s) = \begin{cases} c'(s) & s \notin \{x,y,v\} \\ c'(w) & s=x \text{ NEBO } s=y \\ i \in \{1,\dots,5\} \setminus \{c'(w), c'(u), c'(t), c'(z)\} & \text{JINAK} \end{cases}$$

$\boxtimes$





ASYMPTOTICKÉ ODHADY:

- SPOČÍTAT PŘESNÉ HODNOTY (NAPŘÍKLAD U POČTU NĚJAKÝCH KOMBINATORICKÝCH OBJEKTŮ) MŮŽE BÝT VELICE OBTÍŽNÉ
- ČASTO SE PROTO SPOKOJÍME S PŘIBLIŽNOU HODNOTOU
- UKÁŽEME SI ZNAČENÍ, KTERÉ NÁM POMŮŽE PRACOVAT S PŘIBLIŽNÝMI HODNOTAMI
  - ZVANÉ **LANDAUOVA NOTACE**

- MĚJME REÁLNOU FUNKCI $f(n)$ JEDNÉ PROMĚNNÉ NA $\mathbb{N}$
- ZAJÍMAT NÁS BUDE ASYMPTOTICKÉ CHOVÁNÍ f, NEBOLI CHOVÁNÍ FUNKCE PŘI $n \to \infty$ (ZPRAVIDLA UVAŽUJEME $f(n) \geq 0$ PRO $\forall n \in \mathbb{N}$)

- PŘÍKLAD:
  - FUNKCE $f(n) = \binom{n}{2}$ ROSTE KVADRATICKY V n, NEBOLI EXISTUJÍ KONSTANTY $c_1, c_2, n_0 > 0$ TAKOVÉ, ŽE $c_1 n^2 \leq f(n) \leq c_2 n$ PRO KAŽDÉ $n \geq n_0$
  - TO JISTĚ PLATÍ NAPŘÍKLAD PRO $n_0 = 10$, $c_1 = \frac{1}{3}$ A $c_2 = \frac{1}{2}$, PROTOŽE

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- V NÁSLEDUJÍCÍ TABULCE JE PRO REÁLNÉ FUNKCE $f(n), g(n) ; \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ZACHYCENA LANDAUOVA NOTACE:

ZÁPIS	DEFINICE	VÝZNAM
$f(n) = O(g(n))$	$\exists n_0, C \; \forall n \geq n_0 : \lvert f(n) \rvert \leq C \cdot g(n)$	f ROSTE NANEJVÝŠ TAK RYCHLE JAKO g
$f(n) = o(g(n))$	$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$	f ROSTE PODSTATNĚ POMALEJI NEŽ g
$f(n) = \Omega(g(n))$	$g(n) = O(f(n))$	f ROSTE ASPOŇ TAK RYCHLE JAKO g
$f(n) = \Theta(g(n))$	$f(n) = O(g(n))$ A $f(n) = \Omega(g(n))$	f A g ROSTOU ŘÁDOVĚ STEJNĚ RYCHLE
$f(n) \sim g(n)$	$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$	f A g ROSTOU ASI STEJNĚ RYCHLE

- PŘÍKLAD:
  - PLATÍ $\binom{n}{2} = \Theta(n^2)$, ALE NEPLATÍ $\binom{n}{2} \sim n^2$, PROTOŽE

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\binom{n}{2}}{n^2} = \frac{1}{2} \neq 1$$

  - PRO PEVNÉ $k \in \mathbb{N}$ MÁME $\binom{n}{k} = \Theta(n^k)$

ODHADY FAKTORIÁLU: (3)

- FAKTORIÁL = $n!$ = $n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ = POČET BIJEKCÍ $\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}$
- DEFINICE ŘÍKÁ VŠE, ALE ŠPATNĚ SE S NÍ POČÍTÁ
  ↳ JAK RYCHLE ROSTE $\frac{n^n}{n!}$?
- UKÁŽEME SI TŘI ODHADY
- **TVRZENÍ:**

$$\forall n\in\mathbb{N}:\quad n^{n/2}\le n!\le n^n$$

DK:

i) **HORNÍ ODHAD:**

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \overbrace{i}^{\le n} \le \prod_{i=1}^{n} n = \underline{\underline{n^n}}$$

ii) **DOLNÍ ODHAD:**

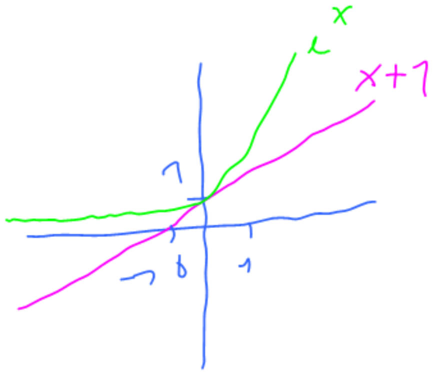
- POUŽIJEME NEROVNOST, KTERÁ ŘÍKÁ, ŽE PRO KAŽDÉ $i=1,\dots,n$ PLATÍ $i(n+1-i)\ge n$
  - PLATÍ PRO $i=1$ A $i=n$
  - PRO $2\le i\le\lceil \frac{n}{2}\rceil$ MÁME $i(n+1-i)\ge 2\cdot\frac{n}{2} = n$
  - PRO $\lceil \frac{n}{2}\rceil \le i < n$ MÁME $i(n+1-i)\ge \frac{n}{2}\cdot 2 = n$
  - $\Rightarrow$ PLATÍ PRO KAŽDÉ $i=1,\dots,n$

$$\Rightarrow (n!)^2 = n!\cdot n! = \underbrace{n\cdot 1}_{\ge n}\cdot\underbrace{(n-1)\cdot 2}_{\ge n}\cdots\underbrace{2\cdot(n-1)}_{\ge n}\cdot\underbrace{1\cdot n}_{\ge n} \ge$$

$$\ge n^n \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{n!\ge n^{n/2}}}$$ ⊠

- NYNÍ SI UKÁŽEME SILNĚJŠÍ ODHAD
- **VĚTA:**
  PRO $\forall n\in\mathbb{N}:\quad e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\cdot n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$

- **LEMMA:**
  - PRO $\forall x\in\mathbb{R}:\quad 1+x\le e^x$ $\quad(e\doteq 2{,}71828\ldots)$
  - DŮLEŽITÝ ODHAD!



- DK:
  - $f(x) := e^x-(x+1)$ — CHCEME UKÁZAT, ŽE $f(x)\ge 0$ PRO $\forall x\in\mathbb{R}$
  - $f'(x) = e^x-1 \Rightarrow (f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0)$
    ↳ 0 JE STACIONÁRNÍ BOD
  - $f''(x)=e^x$
  - $f''(0)=1>0 \Rightarrow$ V BODĚ $x=0$ JE GLOBÁLNÍ MINIMUM PRO f $\Rightarrow f(x)\ge 0$ PRO $\forall x\in\mathbb{R}$ ⊠

– DVA DŮKAZY VĚTY

– 1. DŮKAZ (INDUKCÍ):

a) **HORNÍ ODHAD**:

– PRO $n=1$ PLATÍ $\left(1 = 1! \le e\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{e}\right)^1 = 1\right)$

– NECHŤ $n \ge 2$

$$- n! = n\cdot\underbrace{(n-1)!}_{\text{IP}} \le n\cdot \underbrace{e\cdot(n-1)\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}_{} =$$

$$= e\cdot n\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\underbrace{e\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)^n}_{\text{CHCEME } \le 1}$$

$$- e\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = e\underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}_{} \le e\underbrace{\left(e^{-\frac{1}{n}}\right)^n}_{} = \underline{\underline{1}}$$

LEMMA PRO $x := -1/n$

b) **DOLNÍ ODHAD**:

– PRO $n=1$ PLATÍ $\left(1 = e\left(\frac{1}{e}\right)^1 \le 1! = 1\right)$

– NECHŤ $n \ge 2$

$$- n! = n\underbrace{(n-1)!}_{\text{IP}} \ge n\cdot \underbrace{e\left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1}}_{} = e\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\underbrace{e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}}_{\text{CHCEME } \ge 1}$$

$$- e\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \ge 1 \iff \frac{1}{e}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \le 1$$

$$\frac{1}{e}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{1}{e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{} \le \frac{1}{e}\underbrace{\left(e^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1}}_{} = \underline{\underline{1}}$$

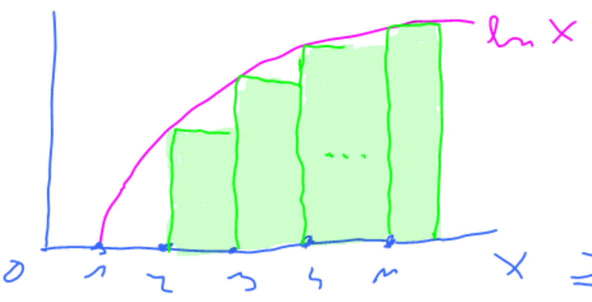
LEMMA S $x := 1/(n-1)$

$\boxtimes$

– 2. DŮKAZ (INTEGRÁLEM):

– POUZE HORNÍ ODHAD (DOLNÍ ODHAD ANALOGICKY)

$$- n! = n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1 \Rightarrow \ln(n!) = \underbrace{\ln(n)+\ln(n-1)+\dots+\ln(2)+\ln(1)}_{\text{PLOCHA ZELENÝCH OBDÉLNÍKŮ}} \le$$



$$\le \underbrace{\int_1^{n+1}\ln x\,dx}_{\text{PLOCHA POD } \ln x} = (n+1)\ln(n+1) - n$$

$$\Rightarrow n! = n(n-1)! = n\cdot e^{\ln((n-1)!)} \le n\cdot \underbrace{e^{n\ln n}}_{=n^n} e^{-(n-1)} =$$

$$= \underline{\underline{ne\left(\frac{n}{e}\right)^n}}$$

$\boxtimes$

- NEJSILNĚJŠÍ ZNÁMÝ ODHAD FAKTORIÁLU
- **VĚTA** (**STIRLINGOVA FORMULE**):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

ZNAČENÍ Z TABULKY

- BEZ DŮKAZU

- DOKÁZAL DE MOIVRE, STIRLING URČIL KONSTANTU