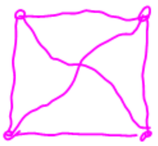
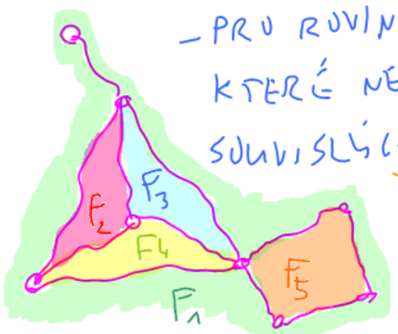
- **ROVINNÉ GRAFY**:
  - FORMÁLNĚ JE GRAF ABSTRAKTNÍ OBJEKT SESTÁVAJÍCÍ Z MNOŽINY VRCHOLŮ A HRAN, ČASTO SI JEJ ALE PŘEDSTAVUJEME OBRÁZKEM, PŘIČEMŽ TENTÝŽ GRAF MŮŽEME NAKRESLIT VÍCE ZPŮSOBY:  – 2 NAKRESLENÍ GRAFU K_4
  - V TÉTO PŘEDNÁŠCE SE BUDEME ZABÝVAT TĚMITO NAKRESLENÍMI
  - ZAČNEME FORMÁLNÍ DEFINICÍ NAKRESLENÍ
- **OBLOUK** V ROVINĚ JE MNOŽINA $\alpha = \gamma([0,1]) = \{\gamma(x) : x \in [0,1]\}$, KDE $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ JE PROSTÁ SPOJITÁ FUNKCE
  - $\gamma(x)$ JE TEDY BODEM NA α, KTERÝ JSME NAKRESLILI „V ČASE x"
  - $\gamma(0)$ A $\gamma(1)$ JSOU KONCOVÝMI BODY KŘIVKY α

- **NAKRESLENÍ GRAFU** $G=(V,E)$ JE NÁSLEDUJÍCÍM PŘIŘAZENÍM:
  - KAŽDÉMU VRCHOLU $v \in V$ PŘIŘADÍME BOD $b(v)$ V ROVINĚ,
  - KAŽDÉ HRANĚ $e = \{u,v\} \in E$ PŘIŘADÍME OBLOUK $\alpha(e)$ S KONCOVÝMI BODY $b(u), b(v)$
  - PŘEDPOKLÁDÁME, ŽE b JE PROSTÉ A POKUD $b(v) \in \alpha(e)$, PAK JE $b(v)$ KONCOVÝM BODEM OBLOUKU $\alpha(e)$
  - **TOPOLOGICKÝ GRAF** := GRAF SPOLEČNĚ SE SVÝM NAKRESLENÍM
- **ROVINNÉ NAKRESLENÍ** = NAKRESLENÍ GRAFU, VE KTERÉM KAŽDÉ 2 OBLOUKY REPREZENTUJÍCÍ RŮZNÉ HRANY JSOU BUĎ DISJUNKTNÍ ANEBO SDÍLÍ POUZE KONCOVÝ BOD
  - TEDY JSOU ZAKÁZANÁ KŘÍŽENÍ HRAN – 

 – NENÍ ROVINNÝM NAKRESLENÍM GRAFU K_4

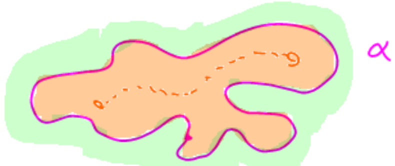
 – JE ROVINNÝM NAKRESLENÍM GRAFU K_4

- **ROVINNÝ GRAF** = GRAF S ASPOŇ JEDNÍM ROVINNÝM NAKRESLENÍM
  - K_4 JE ROVINNÉ
- PRO ROVINNÝ TOPOLOGICKÝ GRAF $G=(V,E)$ SE MNOŽINA BODŮ V ROVINĚ, KTERÉ NENÁLEŽÍ NAKRESLENÍ G, ROZPADNE NA KONEČNĚ MNOHO SOUVISLÝCH OBLASTÍ, KTERÉ NAZÝVÁME **STĚNAMI**
  - NEOMEZENÁ OBLAST SE NAZÝVÁ **VNĚJŠÍ STĚNOU**



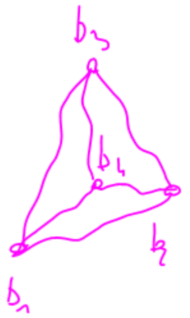
SOUVISLOST ZDE ZNAMENÁ, ŽE KAŽDÉ 2 BODY DANÉ OBLASTI LZE SPOJIT OBLOUKEM OBSAŽENÝM V TÉTO OBLASTI

- UKÁŽEME SI, ŽE ROVINNÉ GRAFY LZE ZADEFINOVAT KOMBINATORICKY
  - ČILI BEZ ODVOLÁVÁNÍ SE NA TOPOLOGII ČI NA VLASTNOSTI ROVINY
- PRO TENTO PŘEVOD BUDEME POTŘEBOVAT VYUŽÍT „KOMBINATORICKOU VLASTNOST ROVINY"
- **JORDANOVA KŘIVKA** = OBRAZ INTERVALU $[0,1]$ PŘES SPOJITÉ ZOBRAZENÍ γ, KTERÉ JE PROSTÉ AŽ NA $\gamma(0) = \gamma(1)$
  - „UZAVŘENÁ SEBENEPROTÍNAJÍCÍ KŘIVKA"



- **VĚTA** (**JORDANOVA VĚTA O KRUŽNICI**)
  KAŽDÁ JORDANOVA KŘIVKA α ROZDĚLUJE ROVINU NA PRÁVĚ DVĚ SOUVISLÉ ČÁSTI („**VNITŘEK**" A „**VNĚJŠEK**" α), JEJICHŽ HRANICÍ JE PRÁVĚ α
  - BEZ DŮKAZU (OBTÍŽNÝ)

- **TVRZENÍ**:
  GRAF K_5 NENÍ ROVINNÝ.
  - DK:
    - SPOREM - NECHŤ EXISTUJE ROVINNÉ NAKRESLENÍ S BODY $b_1, \dots, b_5$, KDE KAŽDÉ b_i JE SPOJENÉ S b_j OBLOUKEM $\alpha(i,j)$
    - $\alpha(1,2), \alpha(2,3)$ S $\alpha(1,3)$ TVOŘÍ JORDANOVU KŘIVKU k, KTERÁ PODLE **JORDANOVY VĚTY O KRUŽNICI** DĚLÍ $\mathbb{R}^2$ NA VNITŘEK A VNĚJŠEK k
    - TEDY b_4 A b_5 OBA LEŽÍ BUĎ VE VNITŘKU ANEBO VE VNĚJŠKU k (JINAK MÁME KŘÍŽENÍ MEZI $\alpha(4,5)$ A k)
    - PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE b_4 A b_5 LEŽÍ VE VNITŘKU (ZBYLÝ PŘÍPAD SE PAK DOKÁŽE ANALOGICKY)
    - PAK b_5 LEŽÍ VE VNITŘKU JORDANOVY KŘIVKY URČENÉ OBLOUKY $\alpha(1,4), \alpha(4,2), \alpha(1,2)$ NEBO $\alpha(2,3), \alpha(3,4), \alpha(2,4)$ NEBO $\alpha(1,3), \alpha(3,4), \alpha(1,4)$



$\underbrace{\alpha(1,4), \alpha(4,2), \alpha(1,2)}$ ⇓ KŘÍŽENÍ MEZI $\alpha(3,5)$ A TOUTO JORDANOVOU KŘIVKOU

$\underbrace{\alpha(2,3), \alpha(3,4), \alpha(2,4)}$ ⇓ KŘÍŽENÍ S $\alpha(1,5)$

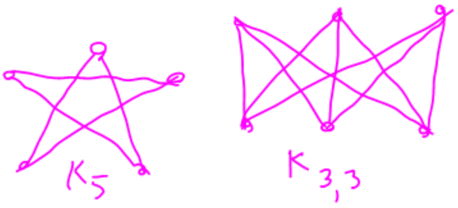
$\underbrace{\alpha(1,3), \alpha(3,4), \alpha(1,4)}$ ⇓ KŘÍŽENÍ S $\alpha(2,5)$

⇒ BOD b_5 NELZE UMÍSTIT ⇒ SPOR ☒

- UKÁŽEME SI, ŽE K_5 JE JEDNOU Z HLAVNÍCH PŘEKÁŽEK ROVINNOSTI
- GRAF G' JE **PODROZDĚLENÍM** GRAFU G, POKUD JE G' IZOMORFNÍ GRAFU, KTERÝ LZE Z G ZÍSKAT PODROZDĚLENÍM NĚKTERÝCH HRAN

- VĚTA (KURATOWSKÉHO VĚTA):

  GRAF G JE ROVINNÝ $\Leftrightarrow$ G NEOBSAHUJE PODGRAF IZOMORFNÍ PODROZDĚLENÍ GRAFU K_5 ČI $K_{3,3}$



  - DÁVÁ KOMBINATORICKOU CHARAKTERIZACI ROVINNÝCH GRAFŮ
  - BEZ DŮKAZU (IMPLIKACE „$\Leftarrow$" JE OBTÍŽNÁ)

- JAKO DALŠÍ KOMBINATORICKOU VLASTNOST ROVINNÝCH GRAFŮ SI UKÁŽEME NÁSLEDUJÍCÍ (STARÝ A DŮLEŽITÝ) VZOREČEK

- TVRZENÍ (EULEROVA FORMULE):

  NECHŤ $G=(V,E)$ JE SOUVISLÝ ROVINNÝ GRAF A NECHŤ f JE POČET STĚN V NĚKTERÉM ROVINNÉM NAKRESLENÍ G. POTOM PLATÍ $|V|-|E|+f=2$.
  - TEDY POČET STĚN NEZÁVISÍ NA NAKRESLENÍ
  - DK:
    - INDUKCÍ PODLE $|E|$
    - ZAČÁTEK INDUKCE - $E=\emptyset \Rightarrow |V|=1, f=1$ A TVRZENÍ PLATÍ
    - INDUKČNÍ KROK - NECHŤ $|E|\geq 1$. ROZLIŠÍME 2 PŘÍPADY.
      - a) G NEOBSAHUJE CYKLUS:

        $\Rightarrow$ G JE STROMEM A TEDY $|E|=|V|-1$

        - MÁME $f=1$, PROTOŽE MÁME JEN VNĚJŠÍ STĚNU

        $\Rightarrow |V|-|E|+f = |V|-|V|+1+1 = \underline{\underline{2}}$
      - b) $\exists e \in E$ OBSAŽENÁ V CYKLU:
        - PAK JE GRAF $G-e$ SOUVISLÝ A ROVINNÝ A Z IP PRO NĚJ EULEROVA FORMULE PLATÍ
        - PODLE JORDANOVY VĚTY O KRUŽNICI JE e V NAKRESLENÍ GRAFU G INCIDENTNÍ DVĚMA STĚNÁM F A F'
        - PO ODEBRÁNÍ e STĚNY F A F' SPLYNOU V JEDNU

        $\Rightarrow$ POČET HRAN I STĚN V $G-e$ OPROTI G O 1 KLESNE A TEDY EULERŮV VZOREC PLATÍ I PRO G ⊠

- EULEROVA FORMULE MÁ ŘADU APLIKACÍ (PLATÓNSKÁ TĚLESA)
- UKÁŽEME SI, ŽE IMPLIKUJE, ŽE ROVINNÉ GRAFY S n VRCHOLY MAJÍ JEN NANEJVÝŠ LINEÁRNĚ MNOHO HRAN V n

- **TVRZENÍ:**
  - Nechť $G=(V,E)$ je rovinný graf s $|V|\geq 3$. Potom $|E| \leq 3|V|-6$.

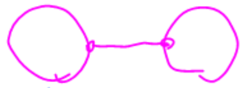
Rovnost nastává pro každý rovinný graf, který je maximální co do počtu hran (tedy nelze přidat další hranu bez porušení rovinnosti)

- DK (NÁČRT):
  - Pokud G není maximální co do počtu hran, tak přidáváme hrany, dokud se maximálním nestane
  - Ukážeme, že v maximálním G je každá stěna trojúhelníkem

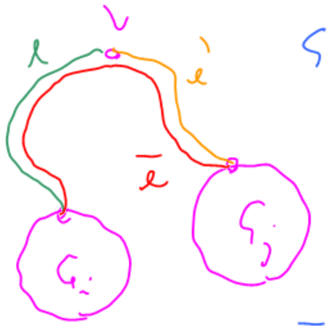
nebudu je ohraničená 3 křivkami, které reprezentují hrany a tvoří C_3

↳ včetně té vnější

- Není-li G souvislý, pak lze jistě hranu přidat



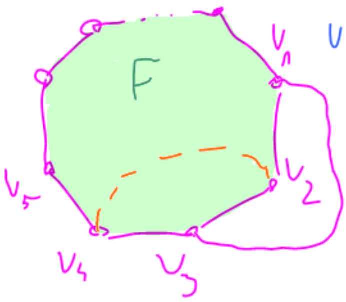
- $\exists$-li vrchol $v\in V$ takový, že $G-v$ není souvislý, pak se $G-v$ rozpadne na komponenty souvislosti $G_1,\dots,G_k$, kde $k\geq 2$
  - pak zvolíme hrany e a e', které spojují v se dvěma komponentami a které jsou nakreslené vedle sebe
  - pak lze konce e a e' spojit novou hranou $\bar{e}$



- Tedy takové v neexistuje a tedy každá stěna tvoří cyklus

↳ to nemáme dokázané, ale budeme tomu věřit (viz kapitoly z diskrétní matematiky), využíváme $n\geq 3$

- Spor — nechť je nějaká stěna F ohraničená cyklem s $t\geq 4$ vrcholy $v_1,\dots,v_t$
  - pokud v_1, v_3 nejsou spojené, lze je spojit hranou uvnitř F
  - jinak v_1 a v_3 jsou spojené vně F a vrcholy v_2 a v_4 spojené nejsou $\Rightarrow$ spojíme v_2 a v_4 uvnitř F



- Tedy každá stěna je skutečně trojúhelníkem
- Dvěma způsoby spočítáme počet z párů (e,F), kde e je hranou stěny F a dostaneme $2|E| = z = 3f$

každá hrana je incidentní dvěma stěnám ↲ ↳ každá stěna má 3 hrany

- Z **Eulerovy formule** pak dostáváme $2=|V|-|E|+f = |V|-|E|+\frac{2}{3}|E|$ a tedy $|E|=3|V|-6$ ☒

- Podobně se dá ukázat, že je-li $G=(V,E)$ rovinný souvislý graf bez K_3, tak $|E|\leq 2|V|-4$
  - Jako důsledek dostáváme, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné a ani jejich podrozdělení nejsou rovinné

BARVENÍ ROVINNÝCH GRAFŮ:

- MOTIVACE – LZE KAŽDOU MAPU (SE SOUVISLÝMI STÁTY) OBARVIT 4 BARVAMI?
- Z MAPY LZE VYTVOŘIT ROVINNÝ GRAF UVÁŽENÍM DUÁLNÍHO GRAFU
- DUÁLNÍM GRAFEM TOPOLOGICKÉHO GRAFU $G=(V,E)$ S MNOŽINOU STĚN $\mathcal{F}$ JE (MULTI)GRAF $G^*=(\mathcal{F},E^*)$, KDE $\{F_i,F_j\}$ JE HRANOU V E^*, POKUD STĚNY F_i A F_j GRAFU G, POKUD $\exists$ HRANA Z E INCIDENTNÍ S F_i A F_j

- G^* MŮŽE MÍT NÁSOBNÉ HRANY I SMYČKY (MŮŽE BÝT $F_i = F_j$)
- E^* JE MULTIMNOŽINA PRVKŮ Z $\mathcal{F} \cup \binom{\mathcal{F}}{2}$

- VĚTA (VĚTA O 4 BARVÁCH):
  KAŽDÝ ROVINNÝ GRAF LZE OBARVIT 4 BARVAMI
  - BEZ DŮKAZU (OBTÍŽNÝ, ASISTOVANÝ POČÍTAČEM)

- VĚTA (VĚTA O 5 BARVÁCH):
  KAŽDÝ ROVINNÝ GRAF $G=(V,E)$ LZE OBARVIT 5 BARVAMI