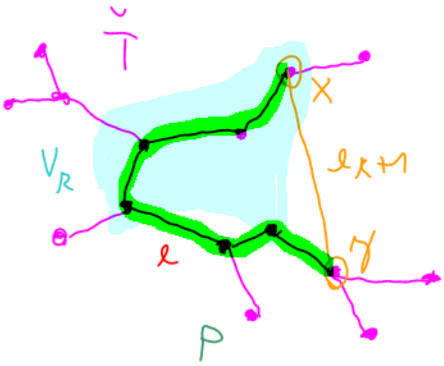
Hledání minimální kostry:

- Motivace – v okresu s několika městy jsou každá dvě města spojená cestou. Chceme z několika cest udělat silnice tak, abychom se z každého města do každého dostali po silnici. Jak to udělat co nejlevněji? (co nejkratší celková délka silnic)
- Úloha z motivace vede na základní problém minimální kostry
- **Kostra grafu** $G=(V,E)$ je strom $T=(V,E')$ splňující $E'\subseteq E$
    - tedy T je podgrafem G, který je stromem a obsahuje všechny vrcholy grafu G
    - kostra grafu G existuje $\Leftrightarrow$ G je souvislý
- nechť jsou hrany našeho grafu G ohodnoceny funkcí $w: E\to\mathbb{R}$
    - pro $E'\subseteq E$ označíme $w(E') = \sum_{e\in E'} w(e)$
- **Problém minimální kostry:**
    - v souvislém grafu $G=(V,E)$ s hranami ohodnocenými funkcí $w: E\to\mathbb{R}$ nalezněte kostru $T=(V,E')$ s minimální hodnotou $w(E')$

$T=(V,E')$ s $w(E')=15$

- Problém minimální kostry dokážeme rychle vyřešit (je známo několik algoritmů)
    - Jarníkův algoritmus (také zvaný Primův algoritmus), Borůvkův algoritmus, Kruskalův algoritmus
- **Jarníkův algoritmus:**
    - objeven V. Jarníkem (1930) a R. C. Primem (1957)
    - **vstup:** souvislý graf $G=(V,E)$ s n vrcholy a funkcí $w: E\to\mathbb{R}$
    - **výstup:** kostra $T=(V,E')$ s minimální $w(E')$
    - zvolme $E_0=\emptyset$ a $V_0=\{v\}$ pro libovolný vrchol $v\in V$
    - pro $i=1,\dots,n-1$:
        - zvol $e_i=\{x_i,y_i\}\in E$ takovou, že $x_i\in V_{i-1}$, $y_i\in V\setminus V_{i-1}$ a $w(e_i)$ je nejmenší mezi $w(\{x,y\})$ s $\{x,y\}\in E$, $x\in V_{i-1}$, $y\notin V_{i-1}$
        - nastav $V_i=V_{i-1}\cup\{y_i\}$ a $E_i=E_{i-1}\cup\{e_i\}$
    - výstup $T=(V_{n-1},E_{n-1})$

- TVRZENÍ (KOREKTNOST JARNÍKOVA ALGORITMU): JARNÍKŮV ALGORITMUS NALEZNE KOSTRU MINIMÁLNÍ VÁHY V KAŽDÉM SOUVISLÉM OHODNOCENÉM GRAFU $(G=(V,E),w)$
  - DK:
    - BUĎ $T=(V,E')$ GRAF NA VÝSTUPU JARNÍKOVA ALGORITMU
    - NEJDŘÍV DOKÁŽEME, ŽE T JE KOSTRA
      - T JE JISTĚ PODGRAFEM G, PROTOŽE DO E' PŘIDÁVÁME JEN HRANY Z E
      - V KAŽDÉM KROKU PŘIDÁME 1 HRANU, PROTOŽE G JE SOUVISLÝ
      - T JE SOUVISLÝ – TO LZE DOKÁZAT INDUKCÍ PODLE $i=1,\dots,m-1$
      - T JE STROMEM, PROTOŽE JE SOUVISLÝ A $|E|=|V|-1$
    - NYNÍ UKÁŽEME, ŽE T JE KOSTRA MINIMÁLNÍ VÁHY
      - NECHŤ $E'=\{e_1,\dots,e_{m-1}\}$, KDE e_i PŘIDÁVÁME DO E' V i-TÉM KROKU
      - SPOREM – NECHŤ EXISTUJE KOSTRA T' MINIMÁLNÍ VÁHY
        $$w(E(T')) < w(E')$$
      - BUĎ $k(T')$ INDEX k TAKOVÝ, ŽE $e_1,\dots,e_k \in E'$, ALE $e_{k+1} \notin E(T')$
      - NECHŤ $\check{T}=(V,\check{E})$ JE KOSTRA MINIMÁLNÍ VÁHY S MAXIMÁLNÍ HODNOTOU $k(\check{T})$ A OZNAČME $k=k(\check{T})$
      - UVAŽME KROK, VE KTERÉM JSME PŘIDALI e_{k+1} DO T
      - NECHŤ $T_k=(V_k,E_k)$ JE STROM TVOŘENÝ HRANAMI $e_1,\dots,e_k$
      - POTOM $e_{k+1}=\{x,y\}$, KDE $x\in V_k$, $y \in V\setminus V_k$
      - UVAŽME GRAF $\check{T} \cup e_{k+1}$
      - PROTOŽE $e_{k+1}\notin \check{E}$ A $\check{T}$ JE STROMEM, TAK $\check{T}+e_{k+1}$ OBSAHUJE CYKLUS C OBSAHUJÍCÍ HRANU e_{k+1}
      - BUĎ P CESTA V C MEZI x A y NEOBSAHUJÍCÍ $\{x,y\}$
      - P OBSAHUJE HRANU e S VRCHOLEM VE V_k A MIMO V_k
      - VÍME, ŽE $e \neq e_{k+1}$, $e\in\check{E}$ A $e_{k+1}\notin\check{E}$
      - TEDY $w(e_{k+1}) \le w(e)$
      - POTOM GRAF $T''=(\check{T}+e_{k+1})-e$ JE SOUVISLÝ A MÁ $m-1$ HRAN $\Rightarrow$ T'' JE KOSTROU
      - $w(E(T''))=w(\check{E})+w(e_{k+1})-w(e)\le w(\check{E}) \Rightarrow$ T'' MÁ MINIMÁLNÍ VÁHU, ALE $k(T'')>k(\check{T}) \Rightarrow$ SPOR S VOLBOU $\check{T}$ ⊠

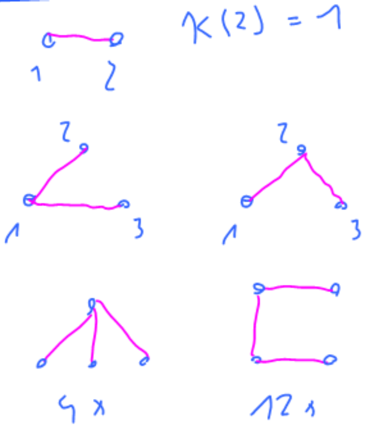


Počítání dvěma způsoby:

- metoda důkazů v kombinatorice
- určíme nějaký neznámý počet X vyjádřením nějakého počtu Z dvěma výrazy, z nichž jeden X obsahuje a druhý ne ⇒ máme vyjádření pro X
    - Van Lint a Wilson tuto techniku označují za jeden z nejdůležitějších nástrojů v kombinatorice
- s touto technikou jsme se již setkali např. u:
    - principu sudosti
    - binomické věty
- ukážeme si další (a pokročilejší) příklady použití

- **Cayleyho vzorec**:
    - kolika způsoby lze vytvořit strom na vrcholech $\{1,\dots,n\}$?
    - neboli jaký je počet koster $\kappa(n)$ grafu K_n?

- Příklad:



$\kappa(2) = 1$

$\kappa(3) = 3$

$\Rightarrow \kappa(4) = 16$

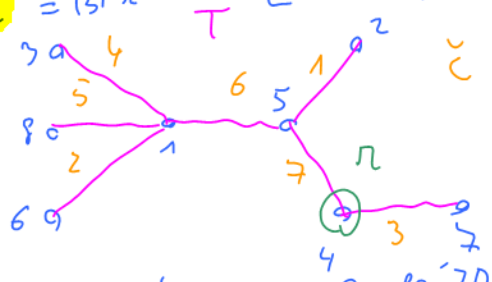
- číslo $\kappa(n)$ se začalo studovat v souvislosti s elektrickými obvody
    - hrany grafu G = vodiče s jednotkovým odporem
    - $\{x,y\}$ = hrana G, pak odpor mezi x a y = $\dfrac{\text{počet koster } G \text{ obsahujících hranu } \{x,y\}}{\text{počet koster } G}$

- **Věta** (**Cayleyho vzorec**): Pro každé $n \geq 2$ platí $\kappa(n) = n^{n-2}$
    - řada důkazů s velmi odlišnými myšlenkami
    - ukážeme si nejjednodušší důkaz založený na počítání dvěma způsoby (objevený Jimem Pitmanem (1999))

– DK CAYLEYHO VZORCE:

- BUDEME DVĚMA ZPŮSOBY POČÍTAT **POVYKOSY** = „POSTUP VÝROBY KOŘENOVÉHO STROMU", FORMÁLNĚ: USPOŘÁDANÁ TROJICE $(T, r, č)$, KDE
  - T = STROM $(\{1, \dots, m\}, E)$
  - r = KOŘEN T
  - $č$ = BIJEKCE $E \to \{1, \dots, m-1\}$ (ČÍSLOVÁNÍ HRAN)

– PŘÍKLAD:



– VYTVÁŘÍME KOŘENOVÝ STROM Z PRÁZDNÉHO GRAFU POSTUPNÝM PŘIDÁVÁNÍM HRAN V POŘADÍ URČENÉM FUNKCÍ č

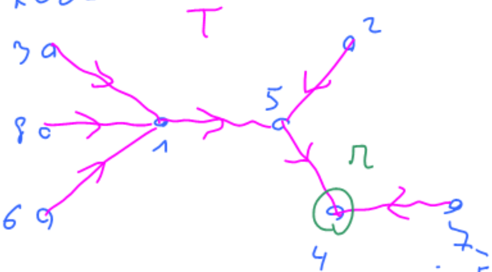
1) **1. ZPŮSOB** POČÍTÁNÍ POVYKOSŮ:

– V KAŽDÉM STROMĚ **T** S **m** VRCHOLY LZE KOŘEN ZVOLIT m ZPŮSOBY A POČET MOŽNÝCH POŘADÍ HRAN JE $(m-1)!$ ⇒ POČET POVYKOSŮ **Z** JE $m(m-1)!\,k(m)$

2) **2. ZPŮSOB** POČÍTÁNÍ POVYKOSŮ:

- KOŘENOVÝ STROM **(T, r)** UVAŽÍME JAKO ORIENTOVANÝ STROM, KDE ŠIPKY SMĚŘUJÍ KE KOŘENU r

– PŘÍKLAD:



- KAŽDÁ ORIENTACE STROMU S PRÁVĚ JEDNÍM VRCHOLEM, KTERÝ NENÍ ZAČÁTKEM ŽÁDNÉ ŠIPKY, JEDNOZNAČNĚ ODPOVÍDÁ KOŘENOVÉMU STROMU
- POVYKOSY SPOČÍTÁME TAK, ŽE K PRÁZDNÉMU ORIENTOVANÉMU GRAFU BUDEME PŘIDÁVAT ŠIPKY V $m-1$ KROCÍCH
  - POŘADÍ PŘIDÁVÁNÍ ŠIPEK PAK URČÍ OČÍSLOVÁNÍ č
- 1. ŠIPKU LZE PŘIDAT $m(m-1)$ ZPŮSOBY (SPOJUJE 2 RŮZNÉ VRCHOLY)
- 2. ŠIPKA NESMÍ VYCHÁZET ZE STEJNÉHO VRCHOLU JAKO TA PRVNÍ

ŠIPKY SMĚŘUJÍ KE KOŘENI

- OBECNĚ **a)** NELZE VYTVOŘIT (NEORIENTOVANOU) KRUŽNICI
  ⇒ NOVÁ ŠIPKA SPOJUJE 2 KOMPONENTY

  b) Z KAŽDÉHO VRCHOLU AŽ NA JEDEN MUSÍ VYCHÁZET ≥ 1 ŠIPKA

  „ŠIPKAMI NELZE PLÝTVAT"

  - CELKEM MÁME $m-1$ ŠIPEK ⇒ KAŽDÁ VYCHÁZÍ Z VRCHOLU, Z NĚJŽ JEŠTĚ NIC NEVYCHÁZÍ

– V KAŽDÉ KOMPONENTĚ JE PRÁVĚ 1 VRCHOL, Z NĚJŽ ŽÁDNÁ ŠIPKA NEVYCHÁZÍ („KOŘEN KOMPONENTY")

– KOMPONENTA MÁ m VRCHOLŮ A $m-1$ HRAN PODLE a) (JE STROM) A PODLE b) Z KAŽDÉHO VYCHÁZÍ ≤ 1 ŠIPKA

⇒ PO PŘIDÁNÍ k ŠIPEK MÁ GRAF $n-k$ KOMPONENT

⇒ $(k+1)$-NÍ ŠIPKA VEDE Z KOŘENE NĚJAKÉ KOMPONENTY DO LIBOVOLNÉHO VRCHOLU JINÉ KOMPONENTY ⇒ $(n-k-1)n$ MOŽNOSTÍ

⇒ POČET POSLOUPNOSTÍ JE $Z = \prod_{k=0}^{n-2} (n-k-1)n = (n-1)!\, n^{n-1}$

⇒ Z OBOU ZPŮSOBŮ MÁME $n(n-1)!\, k(n) = Z = (n-1)!\, n^{n-1} \Rightarrow \underline{\underline{k(n) = n^{n-2}}}$