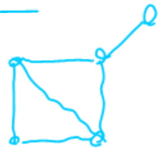
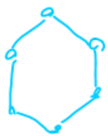
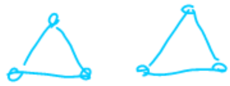
– SKÓRE GRAFU:

- mějme graf $G = (V, E)$
- stupeň vrcholu v v G značíme $\deg_G(v) = |\{e \in E : v \in e\}|$
- pro nějaké pořadí $v_1, \dots, v_n$ vrcholů z V nazveme posloupnost $(\deg_G(v_1), \deg_G(v_2), \dots, \deg_G(v_n))$ skóre grafu G
  - různá pořadí dávají různá skóre, mezi kterými ale nerozlišujeme
  - typicky budeme skóre zaznamenávat v neklesajícím pořadí
  - příklad:

1) 

2) 

3) 

$(1,2,3,3,3)$ $(2,2,2,2,2,2)$ $(2,2,2,2,2,2)$

  - izomorfní grafy mají stejné skóre, ale existují neizomorfní grafy se stejným skóre (viz 2) a 3))

- jaké posloupnosti mohou být skórem nějakého grafu?
  - ne všechny posloupnosti vyhovují, podle principu sudosti musí být například počet vrcholů lichého stupně sudý
- existuje charakterizace takových posloupností (Erdős-Gallai)
- ukážeme si jednoduchý algoritmus, který rozhodne, zda je daná posloupnost skórem
  ↳ tzv. **Havlův algoritmus** (1955)

- **Věta** (**věta o skóre**):
  Nechť je $D = (d_1, \dots, d_n)$ posloupnost $n \geq 2$ čísel z $\mathbb{N}_0$. Předpokládejme $d_1 \leq \dots \leq d_n$ a nechť je $D' = (d'_1, \dots, d'_{n-1})$ posloupnost, kde

$$d'_i = \begin{cases} d_i & i < n - d_n \\ d_i - 1 & i \geq n - d_n. \end{cases}$$

  Potom je D skórem grafu $\Leftrightarrow$ D' je skórem grafu.

- příklad:

$$D = (1,1,2,2,2,3,3) \Rightarrow D' = (1,1,2,1,1,2)$$

- OK:

i) $\Leftarrow$:

- NECHŤ D' JE SKÓRE NĚJAKÉHO GRAFU $G' = (V', E')$, KDE $V' = \{v'_1, \dots, v'_{m-1}\}$ A $\deg_{G'}(v'_i) = d'_i$ PRO KAŽDÉ $i \in \{1, \dots, m-1\}$
- POTOM Z G' VYTVOŘÍME GRAF G NA m VRCHOLECH PŘIDÁNÍM NOVÉHO VRCHOLU NAPOJENÉHO HRANAMI NA $v'_{m-d_m+1}, \dots, v'_m$
- POTOM D JE SKÓRE GRAFU G

ii) $\Rightarrow$:

- NECHŤ JE D SKÓRE NĚJAKÉHO GRAFU
- OZNAČME JAKO $\mathcal{G}$ MNOŽINU VŠECH GRAFŮ G NA VRCHOLECH $v_1, \dots, v_m$ TAKOVÝCH, ŽE $\deg_G(v_i) = d_i$ PRO KAŽDÉ $i \in \{1, \dots, m\}$
- VÍME, ŽE $\mathcal{G} \neq \emptyset$
- UKÁŽEME, ŽE $\exists$ GRAF $G_0 \in \mathcal{G}$ TAKOVÝ, ŽE v_m JE V G_0 SPOJENÝ HRANAMI S POSLEDNÍMI d_m VRCHOLY, TEDY S $v_{m-d_m}, \dots, v_{m-1}$
  - POTOM UŽ GRAF G' VZNIKLÝ Z G ODEBRÁNÍM v_m MÁ SKÓRE D', ČÍMŽ BUDEME MÍT VĚTU DOKÁZANOU
  - POKUD $d_m = m-1$, PAK JE v_m NAPOJENÉ NA VŠECHNY VRCHOLY A TVRZENÍ PLATÍ PRO KAŽDÝ GRAF Z $\mathcal{G}$
  - NECHŤ JE TEDY $d_m < m-1$
  - BUĎ PRO $G \in \mathcal{G}$ ČÍSLO $j(G)$ NEJVĚTŠÍ INDEX $j \in \{1, \dots, m-1\}$ TAKOVÝ, ŽE $\{v_j, v_m\} \notin E(G)$

j EXISTUJE, PROTOŽE $d_m < m-1$

  - BUĎ G_0 GRAF Z $\mathcal{G}$ S NEJMENŠÍ HODNOTOU $j(G_0)$
  - STAČÍ UKÁZAT, ŽE $j(G_0) = m - d_m - 1$
    - SPOREM - NECHŤ $j = j(G_0) > m - d_m - 1$
    - v_m JE SPOJENÝ S d_m VRCHOLY v_i Z NICHŽ $\leq d_m - 1$ MÁ INDEX VĚTŠÍ NEŽ j

PROTOŽE $j > m - d_m - 1$

$\Rightarrow \exists i < j : \{v_i, v_m\} \in E(G_0)$

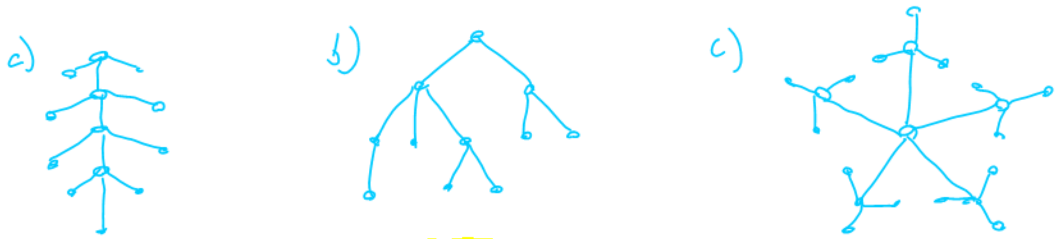
$\{v_i, v_k\} \notin E(G_0)$

    - Z $\deg_{G_0}(v_i) \leq \deg_{G_0}(v_j)$, TAK $\exists v_k$ S $\{v_j, v_k\} \in E(G_0)$
    - PAK ALE GRAF $G' = (V, E(G_0) \setminus \{\{v_i, v_m\}, \{v_j, v_k\}\} \cup \{\{v_j, v_m\}, \{v_i, v_k\}\})$ MÁ SKÓRE D A $j(G') < j(G_0) \Rightarrow$ SPOR

POSLEDNÍ VRCHOL NESPOJENÝ S v_m

STROMY:

- zaměříme se na jednu velmi užitečnou třídu grafů
- **STROM** = souvislý graf bez cyklů
  - existuje řada ekvivalentních definic (uvidíme později)
- příklady:



- vrchol stupně 1 nazveme **LISTEM**
- ukážeme si první dvě základní vlastnosti stromů
- **LEMMA 1**: Každý strom s aspoň 2 vrcholy obsahuje ≥ 2 listy
  - neplatí pro nekonečné grafy:

  - DK:
    - nechť je $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_t, v_t)$ cesta maximální délky ve stromě $T = (V, E)$
    - zjevně je $v_0 \neq v_t$
    - ukážeme, že v_0 a v_t jsou listy
    - sporem – nechť v_0 není list
      - pak $\exists$ hrana $e = \{v_0, v\} \in E$ taková, že $e \neq e_1$
      - v neleží na P, jinak bychom měli v T cyklus
      - tedy $v \notin \{v_0, \dots, v_t\}$ a P lze prodloužit na delší cestu v T, což je spor s volbou P ⊠

- **LEMMA 2**: Pro graf G a list v platí G je stromem $\Leftrightarrow$ $G - v$ je stromem

  $G - v$: graf vzniklý z G odebráním v a s ním incidentních hran

- DK:
  - i) $\Rightarrow$: – nechť $G = (V, E)$ je stromem
    - pro $x, y \in V$ cesta mezi x a y neobsahuje v a je tedy obsažena v $G - v$ $\Rightarrow$ $G - v$ je stromem
  - ii) $\Leftarrow$: – nechť $G - v$ je stromem
    - přidáním v nevytvoříme cyklus a mezi každými dvěma vrcholy bude existovat cesta (ze souvislosti $G - v$) $\Rightarrow$ G je stromem ⊠

– NYNÍ UVEDEME 5 EKVIVALENTNÍCH DEFINIC STROMŮ

– VĚTA (CHARAKTERIZACE STROMŮ):
PRO KAŽDÝ GRAF $G = (V, E)$ JSOU NÁSLEDUJÍCÍ PODMÍNKY EKVIVALENTNÍ
1) G JE STROMEM
2) (JEDNOZNAČNOST CEST)
MEZI KAŽDÝMI DVĚMA VRCHOLY Z G VEDE PRÁVĚ JEDNA CESTA
3) (MINIMÁLNÍ SOUVISLÝ)
G JE SOUVISLÝ A PO ODEBRÁNÍ LIBOVOLNÉ HRANY SOUVISLÝ NENÍ
4) (MAXIMÁLNÍ BEZ CYKLŮ)
G NEOBSAHUJE CYKLUS, ALE PO PŘIDÁNÍ LIBOVOLNÉ NOVÉ HRANY CYKLUS VZNIKNE
5) (EULEROVA FORMULE)
G JE SOUVISLÝ A $|E| = |V| - 1$

– DK:
– UKÁŽEME, ŽE PODMÍNKY 2), 3), 4), 5) JSOU EKVIVALENTNÍ S 1),
COŽ NÁM DÁ EKVIVALENCE MEZI VŠEMI PODMÍNKAMI
– UKÁŽEME, ŽE 1) IMPLIKUJE 2), 3), 4), 5)
– POSTUPOVAT BUDEME INDUKCÍ PODLE $|V|$ ZA POMOCI LEMMA 2
– ZÁKLAD INDUKCE – VĚTA JISTĚ PLATÍ PRO $|V| = 1$
– INDUKČNÍ KROK:
– NECHŤ $|V| \geq 2$
– NECHŤ G JE STROM, PAK PODLE LEMMA 1 V G EXISTUJE LIST v.
– PODLE LEMMA 2 JE $G - v$ STROMEM A Z IP SPLŇUJE 2), 3), 4), 5)
– POTOM IMPLIKACE $1) \Rightarrow 2)$, $1) \Rightarrow 3)$ A $1) \Rightarrow 5)$ JSOU TRIVIÁLNÍ
– $1) \Rightarrow 4)$:
– POKUD $\{x, y\} \notin E$, PAK CESTA MEZI x A y V $G - v$ SPOLU S $\{x, y\}$ TVOŘÍ CYKLUS V G

- ZBÝVÁ UKÁZAT, ŽE KAŽDÁ Z PODMÍNEK 2), 3), 4), 5) IMPLIKUJE 1) (5)
- 2) ⇒ 1) A 3) ⇒ 1):
  - V PODMÍNKÁCH 2), 3) UŽ PŘEDPOKLÁDÁME SOUVISLOST
  - GRAF SPLŇUJÍCÍ 2) NEOBSAHUJE CYKLUS, PROTOŽE JEHO VRCHOLY JSOU SPOJENÉ 2 CESTAMI
  - GRAF SPLŇUJÍCÍ 3) TAKÉ NEOBSAHUJE CYKLUS, PROTOŽE PO ODEBRÁNÍ HRANY CYKLU ZŮSTÁVÁ GRAF SOUVISLÝ
- 4) ⇒ 1):
  - STAČÍ OVĚŘIT, ŽE G JE SOUVISLÝ, PROTOŽE CYKLY NEOBSAHUJE
  - PRO $x, y \in V$ JE BUĎ $\{x,y\} \in E$ NEBO $G + \{x,y\}$ OBSAHUJE CYKLUS A ODSTRANĚNÍ $\{x,y\}$ Z TOHOTO CYKLU NÁM DÁ CESTU MEZI x A y V G
- 5) ⇒ 1):
  - POSTUPUJEME OPĚT INDUKCÍ PODLE $|V|$
  - ZÁKLAD INDUKCE - $|V| = 1$ JE TRIVIÁLNÍ
  - INDUKČNÍ KROK:
    - NECHŤ $|V| \geq 2$ A NECHŤ G JE SOUVISLÝ GRAF SPLŇUJÍCÍ $|E| = |V| - 1$
    - Z PRINCIPU SUDOSTI JE $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|E| = 2|V| - 2$
    - TEDY EXISTUJE VRCHOL STUPNĚ < 2
    - ZE SOUVISLOSTI G MÁ KAŽDÝ VRCHOL STUPEŇ ASPOŇ 1 A TEDY V G EXISTUJE LIST v
    - POTOM $G' = G - v$ JE STÁLE SOUVISLÝ A SPLŇUJE $|E(G')| = |V(G')| - 1$ A $|V(G')| < |V|$
    - Z IP JE TEDY G' STROMEM
    - POTOM JE I G STROMEM PODLE LEMMA 2

$\boxtimes$