MNOŽINY, ZÁKLADNÍ OPERACE A ZNAČENÍ

1

- **MNOŽINA** = SOUBOR PRVKŮ TAKOVÝCH, ŽE O KAŽDÉM PRVKU LZE ROZHODNOUT, ZDA DO MNOŽINY PATŘÍ ČI NE
- $z \in X$ = PRVEK z PATŘÍ DO MNOŽINY X
- PRÁZDNOU MNOŽINU ZNAČÍME $\emptyset$
- U KONEČNÉ MNOŽINY X ZNAČÍME JAKO $|X|$ MOHUTNOST MNOŽINY X = POČET PRVKŮ, KTERÉ OBSAHUJE
  - MOHUTNOST LZE UŽÍT I PRO NEKONEČNÉ MNOŽINY, TO SI ALE UKÁŽEME AŽ POZDĚJI
- MNOŽINU LZE ZNAČIT VÝČTEM PRVKŮ $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ (PAK $\emptyset = \{\}$)
  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$
- MNOŽINU LZE ZNAČIT I POMOCÍ <u>VHODNÉ</u> VLASTNOSTI
  - NAPŘÍKLAD MNOŽINU $M = \{0, 1, \dots, 10\}$ LZE ZAPSAT JAKO
    $M = \{x \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq x \leq 10\}$
    - PŘÍKLAD NEVHODNÉ VLASTNOSTI $X = \{A : A \notin A\}$
      - POTOM PLATÍ $X \in X$ PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ $X \notin X$
      - VIZ RUSSELLŮV PARADOX (BERTRAND RUSSELL (1872-1970))

- **ČÍSELNÉ OBORY**:
  - JEDNÁ SE O PŘÍKLADY MNOŽIN, SE KTERÝMI BUDEME ČASTO PRACOVAT
  - $\mathbb{N}_0$ - PŘIROZENÁ ČÍSLA $(0, 1, 2, 3, 4, \dots)$, NĚKDY NULU NEOBSAHUJÍ - $\mathbb{N}$
    - DEFINUJÍ SE MNOŽINAMI: $0 = \{\}$, $1 = \{0\} = \{\{\}\}$, $2 = \{0,1\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$, ...
    - TEDY $m \in \mathbb{N}_0$ VYJADŘUJE MOHUTNOST MNOŽINY O m PRVCÍCH
  - $\mathbb{Z}$ - CELÁ ČÍSLA $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$
  - $\mathbb{Q}$ - RACIONÁLNÍ ČÍSLA (ČÍSLA TVARU $\frac{a}{b}$, KDE $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$)
  - $\mathbb{R}$ - REÁLNÁ ČÍSLA (ČÍSLA, KTERÁ LZE ZAPSAT DESETINNÝM ROZVOJEM, KTERÝ MŮŽE BÝT NEKONEČNÝ)

- **ČÍSELNÉ OPERACE A FUNKCE**:
  - $+, -, \cdot, :, \ln, \exp, \sqrt{\ }, x^y, \lfloor\ \rfloor, \lceil\ \rceil, \dots$
    $\ln$ – PŘIROZENÝ LOGARITMUS; EXP – EXPONENCIÁLA; $\lfloor\ \rfloor$ – DOLNÍ CELÁ ČÁST; $\lceil\ \rceil$ – HORNÍ CELÁ ČÁST
  - $\sum$ (SUMA), $\prod$ (SOUČIN)
  - <u>PŘÍKLAD:</u>
    $$a_1 + a_2 + \dots + a_m = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{i \in \{1, \dots, m\}} a_i$$
    $$\sum_{\emptyset} \text{COKOLIV} = 0, \quad \prod_{\emptyset} \text{COKOLIV} = 1$$

KVANTIFIKÁTORY A LOGICKÉ SPOJKY:

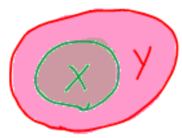
- MĚJME VÝROKY A, B (TEDY TVRZENÍ O MNOŽINÁCH, O KTERÝCH LZE ROZHODNOUT, ZDA JSOU PRAVDIVÁ (1) ČI NEPRAVDIVÁ (0))
- $\forall$ = UNIVERZÁLNÍ KVANTIFIKÁTOR („PRO KAŽDÉ")
- $\exists$ = EXISTENČNÍ KVANTIFIKÁTOR („EXISTUJE")
- $\Rightarrow$ = IMPLIKACE ($A \Rightarrow B$ - „JESTLIŽE A, POTOM B")
- $\Leftrightarrow$ = EKVIVALENCE ($A \Leftrightarrow B$ - „A PRÁVĚ TEHDY, KDYŽ B")
- $\wedge$ = KONJUNKCE ($A \wedge B$ - „A A ZÁROVEŇ B")
- $\vee$ = DISJUNKCE ($A \vee B$ - „A NEBO B")
- $\neg$ = NEGACE ($\neg A$ - „NEPLATÍ A")
- ZAPSÁNO PRAVDIVOSTNÍ TABULKOU:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\neg A$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	0

↳ ZDE BY BYLA 0 U TAKZVANÉ EXKLUZIVNÍ DISJUNKCE (XOR)

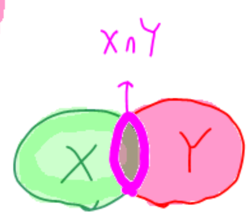
ZÁKLADNÍ MNOŽINOVÉ OPERACE:

- MĚJME MNOŽINY X, Y
- INKLUZE - MNOŽINA X JE PODMNOŽINOU MNOŽINY Y, ZNAČENO $X \subseteq Y$

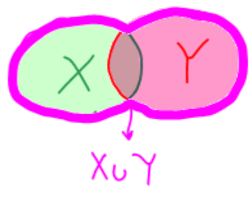


  - FORMÁLNĚ: $\forall x : x \in X \Rightarrow x \in Y$
  - PLATÍ $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

- DOPLNĚK MNOŽINY X JE $\overline{X} = \{x : x \notin X\}$
  - V $\mathbb{R}$ JE $\overline{\mathbb{Q}}$ MNOŽINA IRACIONÁLNÍCH ČÍSEL



- PRŮNIK MNOŽIN X A Y JE $X \cap Y = \{z : z \in X \wedge z \in Y\}$
- SJEDNOCENÍ MNOŽIN X A Y JE $X \cup Y = \{z : z \in X \vee z \in Y\}$



- POTENČNÍ MNOŽINA MNOŽINY X JE $\mathcal{P}(X) = 2^X = \{X' : X' \subseteq X\}$
  - $\mathcal{P}(X)$ = MNOŽINA VŠECH PODMNOŽIN MNOŽINY X
  - $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$
  - $\mathbb{R}$ MÁ STEJNOU MOHUTNOST JAKO $2^{\mathbb{N}}$

- VYBRANÉ VLASTNOSTI MNOŽINOVÝCH OPERACÍ:
  - $X \cup \emptyset = X$, $X \cap \emptyset = \emptyset$, $\overline{(\overline{X})} = X$
  - KOMUTATIVITA $\cup$ A $\cap$:

    $$X \cup Y = Y \cup X, \quad X \cap Y = Y \cap X$$

  - ASOCIATIVITA $\cup$ A $\cap$:

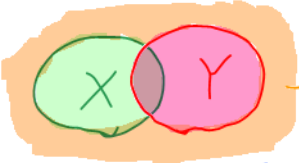
    $$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z), \quad (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

  - DISTRIBUTIVITA $\cap$ PŘES $\cup$ (I NAOPAK):

    $$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$
    $$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$$

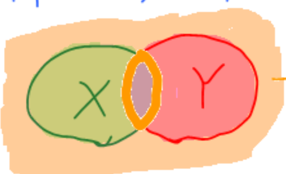
    PRO SROVNÁNÍ: PLATÍ
    $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$,
    ALE NEPLATÍ
    $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

  - DE MORGANOVY ZÁKONY:
    - AUGUSTUS DE MORGAN (1806–1871), BYLY ZNÁMY JIŽ ARISTOTELOVI (384 PŘ. N. L. – 322 PŘ. N. L.)
    - $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$ – „DOPLNĚK SJEDNOCENÍ JE PRŮNIKEM DOPLŇKŮ"



$\to \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$

    - $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ – „DOPLNĚK PRŮNIKU JE SJEDNOCENÍM DOPLŇKŮ"



$\to \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$

- MNOŽINOVÝ SYSTÉM – $\{X_i : i \in I\}$
  - NAPŘÍKLAD PRO $I = \{1,2,3\}$ DOSTANEME SYSTÉM $\{X_1, X_2, X_3\}$
  - PRŮNIK SYSTÉMU – $\bigcap_{i \in I} X_i = \{x : \forall i \in I : x \in X_i\}$
    - $\bigcap_{i \in I} X_i = X_1 \cap X_2 \cap X_3$
  - SJEDNOCENÍ SYSTÉMU – $\bigcup_{i \in I} X_i = \{x : \exists i \in I : x \in X_i\}$
    - $\bigcup_{i \in I} X_i = X_1 \cup X_2 \cup X_3$

- **DŮKAZOVÉ TECHNIKY**:
  - **DŮKAZ** = DEMONSTRACE NUTNÉ PRAVDIVOSTI TVRZENÍ ZA URČITÝCH PŘEDPOKLADŮ (AXIOMŮ)
  - ROZLIŠUJEME RŮZNÉ TYPY DŮKAZŮ

1) **PŘÍMÝ DŮKAZ**:
   - K DOKÁZÁNÍ VÝROKU $\underset{\text{PŘEDPOKLAD}}{A} \Rightarrow \underset{\text{ZÁVĚR}}{B}$ POUŽIJEME ŘADU PLATNÝCH IMPLIKACÍ
   - FORMÁLNĚ: $(A \Rightarrow A_1) \wedge (A_1 \Rightarrow A_2) \wedge \cdots \wedge (A_{m-1} \Rightarrow A_m) \wedge (A_m \Rightarrow B)$

2) **DŮKAZ SPOREM**:
   - TYP DŮKAZU, VE KTERÉM SE UKÁŽE, ŽE PŘEDPOKLAD VEDE K NESMYSLNÉMU VÝSLEDKU (KE **SPORU**) A TEDY PŘEDPOKLAD JE NEPRAVDIVÝ A PLATÍ JEHO NEGACE
   - VYCHÁZÍ Z EKVIVALENCE $C \Leftrightarrow \neg\neg C \Leftrightarrow (\neg C \Rightarrow \underset{\text{SPOR}}{0})$
   - TEDY POKUD $C = (A \Rightarrow B)$, PAK PŘEDPOKLÁDÁME $\neg C = (A \wedge \neg B)$ A ODVODÍME SPOR
   - **NEPŘÍMÝ DŮKAZ**, KDY DOKAZUJEME $A \Rightarrow B$ POMOCÍ EKVIVALENTNÍHO VÝROKU $\neg B \Rightarrow \neg A$, LZE VŽDY PŘEDĚLAT NA DŮKAZ SPOREM (PŘEDPOKLÁDÁME $A \& \neg B$ A DOKÁŽEME $\neg A$, PAK MÁME SPOR S PŘEDPOKLADEM A)
     POMOCÍ $\neg B \Rightarrow \neg A$

3) **MATEMATICKÁ INDUKCE**:
   - MĚJME TVRZENÍ **$A(m)$** O PŘIROZENÉM ČÍSLE **m**
   - ABYCHOM DOKÁZALI, ŽE $A(m)$ PLATÍ PRO VŠECHNA PŘIROZENÁ ČÍSLA m, DOKAZUJEME, ŽE „JESTLIŽE PLATÍ $A(m)$ PRO VŠECHNA **m**$<m$, PAK PLATÍ $A(m)$"
   - FORMÁLNĚ:

     $\forall m \in \mathbb{N}$: (i) DOKÁŽEME $A(0)$

     (ii) DOKÁŽEME PLATNOST IMPLIKACE $A(m) \Rightarrow A(m+1)$

     PŘÍPADNĚ $A(0) \wedge \cdots \wedge A(m)$ U SILNÉ INDUKCE

   - JE EKVIVALENTNÍ S **PRINCIPEM DOBRÉHO USPOŘÁDÁNÍ**: KAŽDÁ NEPRÁZDNÁ PODMNOŽINA PŘIROZENÝCH ČÍSEL OBSAHUJE NEJMENŠÍ PRVEK
     → NĚKDY NAZÝVANÝ ZERMELOVA VĚTA, VE SKUTEČNOSTI SE JEDNÁ O AXIOM

     - MNOŽINA PROTIPŘÍKLADŮ K TVRZENÍ „VÝROK $A(m)$ PLATÍ PRO VŠECHNA $m \in \mathbb{N}_0$" MUSÍ MÍT NEJMENŠÍ PRVEK, JE-LI NEPRÁZDNÁ (PODLE **PRINCIPU DOBRÉHO USPOŘÁDÁNÍ**) A TEDY NEEXISTUJE-LI NEJMENŠÍ PROTIPŘÍKLAD, PAK NEEXISTUJE ŽÁDNÝ A TVRZENÍ $A(m)$ PLATÍ PRO VŠECHNA **m** $\in \mathbb{N}$

- POZOR NA „NEÚPLNOU INDUKCI"

- PŘÍKLAD:

- 3 TYPY DŮKAZU FAKTU $\forall m \in \mathbb{N}_0 : m \geq 1 \Rightarrow 3 \mid m^3 - m$

↳ $m^3 - m$ JE DĚLITELNÉ TŘEMI

1) **PŘÍMÝ DŮKAZ:**

- LIBOVOLNÉ m ZAPÍŠEME JAKO $m = 3k + a$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{0,1,2\}$
- POTOM $m^3 - m = (3k)^3 + 3(3k)^2 a + 3(3k)a^2 + a^3 - 3k - 3 =$

$$= 3[\dots] + \underbrace{a^3 - a}_{} \Rightarrow \underline{\underline{3 \mid m^3 - m}}$$

↳ TOTO ČÍSLO JE DĚLITELNÉ TŘEMI PRO $a \in \{0,1,2\}$

$\boxtimes$

2) **DŮKAZ SPOREM:**

- PRO SPOR PŘEDPOKLÁDEJME, ŽE $\exists\, m \in \mathbb{N}_0$, $m \geq 1$ TAKOVÉ, ŽE $3 \nmid m^3 - m$
- MÁME $m^3 - m = (m-1)m(m+1)$
- ROZEPÍŠEME $m = 3k + a$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \{0,1,2\}$
- POTOM PRO

$$\left.\begin{array}{lll} a = 0 & \text{JE} & m = 3k \Rightarrow 3 \mid m^3 - m \\ a = 1 & \text{JE} & m - 1 = 3k \Rightarrow 3 \mid m^3 - m \\ a = 2 & \text{JE} & m + 1 = 3k + 3 \Rightarrow 3 \mid m^3 - m \end{array}\right\} \ \underline{\underline{\text{SPOR}}} \text{ S } 3 \nmid m^3 - m$$

$\boxtimes$

3) **DŮKAZ INDUKCÍ:**

- ZAČÁTEK INDUKCE: PRO $m = 1$ TVRZENÍ PLATÍ, PROTOŽE $3 \mid 1^3 - 1 = 0$
- INDUKČNÍ KROK:
  - NECHŤ $3 \mid m^3 - m$, (PRO $m \geq 1$) CHCEME UKÁZAT, ŽE $3 \mid (m+1)^3 + (m+1)$
  - $m^3 - m = (m-1)m(m+1)$ A TAKÉ $(m+1)^3 + (m+1) = m(m+1)(m+2)$
  - 3 JE PRVOČÍSLO A $3 \mid m^3 - m \Rightarrow (3 \mid m-1) \vee (3 \mid m) \vee (3 \mid m+1)$
  - $3 \mid m - 1 \Rightarrow 3 \mid m + 2 = (m-1) + 3 \Rightarrow \underline{\underline{3 \mid (m+1)^3 + (m+1)}}$

    $3 \mid m \Rightarrow \underline{\underline{3 \mid (m+1)^3 + (m+1)}}$

    $3 \mid m + 1 \Rightarrow \underline{\underline{3 \mid (m+1)^3 + (m+1)}}$

$\boxtimes$