Diskrétní matematika

Martin Balko

3. přednáška

15. října 2019

Připomenutí z minula

Připomenutí z minula

- Relace R mezi X a Y je $R \subseteq X \times Y$, relace R na X je $R \subseteq X^2$.

Připomenutí z minula

- Relace R mezi X a Y je $R \subseteq X \times Y$, relace R na X je $R \subseteq X^2$.
- Na X rozlišujeme relace

Připomenutí z minula

- Relace R mezi X a Y je $R \subseteq X \times Y$, relace R na X je $R \subseteq X^2$.
- Na X rozlišujeme relace
  - reflexivní: $\forall x \in X : xRx$,
  - symetrické: $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$,
  - tranzitivní: $\forall x, y, z \in X : xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$,
  - antisymetrické: $\forall x, y \in X : xRy \;\&\; yRx \Rightarrow x = y$.

Připomenutí z minula

- Relace R mezi X a Y je $R \subseteq X \times Y$, relace R na X je $R \subseteq X^2$.
- Na X rozlišujeme relace
    - reflexivní: $\forall x \in X : xRx$,
    - symetrické: $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$,
    - tranzitivní: $\forall x, y, z \in X : xRy \;\&\; yRz \Rightarrow xRz$,
    - antisymetrické: $\forall x, y \in X : xRy \;\&\; yRx \Rightarrow x = y$.
- Dva speciální případy relací:

Připomenutí z minula

- Relace R mezi X a Y je $R \subseteq X \times Y$, relace R na X je $R \subseteq X^2$.
- Na X rozlišujeme relace
    - reflexivní: $\forall x \in X : xRx$,
    - symetrické: $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$,
    - tranzitivní: $\forall x, y, z \in X : xRy \,\&\, yRz \Rightarrow xRz$,
    - antisymetrické: $\forall x, y \in X : xRy \,\&\, yRx \Rightarrow x = y$.
- Dva speciální případy relací:
    - funkce: relace f mezi X a Y taková, že $\forall x \in X\ \exists! y \in Y : xfy$,

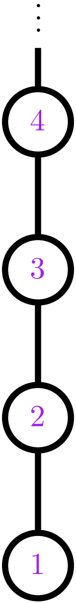
Připomenutí z minula

- Relace R mezi X a Y je $R \subseteq X \times Y$, relace R na X je $R \subseteq X^2$.
- Na X rozlišujeme relace
  - reflexivní: $\forall x \in X : xRx$,
  - symetrické: $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$,
  - tranzitivní: $\forall x, y, z \in X : xRy \ \& \ yRz \Rightarrow xRz$,
  - antisymetrické: $\forall x, y \in X : xRy \ \& \ yRx \Rightarrow x = y$.
- Dva speciální případy relací:
  - funkce: relace f mezi X a Y taková, že $\forall x \in X \ \exists! y \in Y : xfy$,
  - ekvivalence = relace na X, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Částečná uspořádání

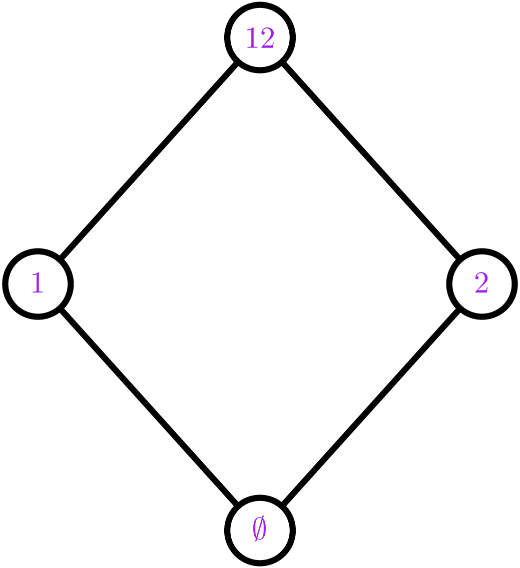
Příklad Hasseova diagramu: $(\mathbb{N}, \leq)$

Příklad Hasseova diagramu: $(\mathbb{N}, \leq)$



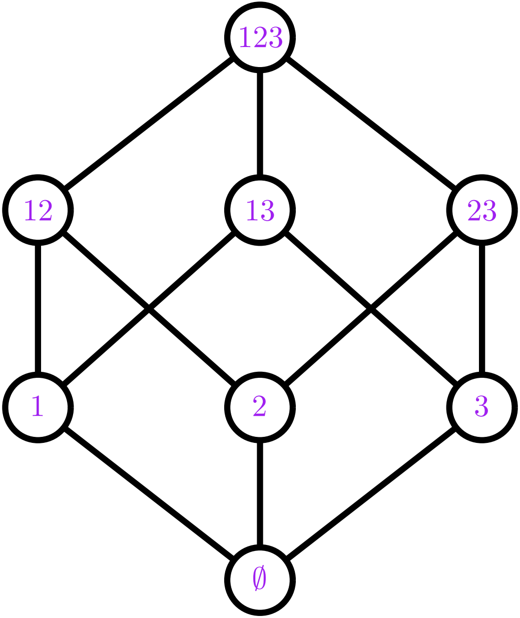
Příklad Hasseova diagramu: $(2^{\{1,2\}}, \subseteq)$

Příklad Hasseova diagramu: $(2^{\{1,2\}}, \subseteq)$



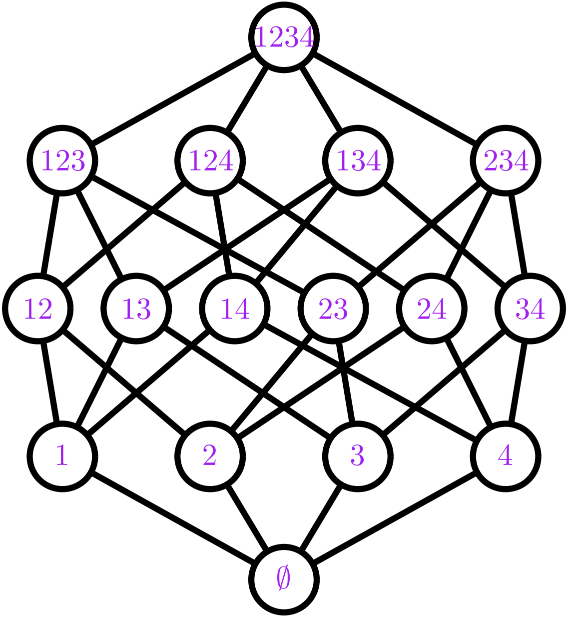
Příklad Hasseova diagramu: $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$

Příklad Hasseova diagramu: $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$



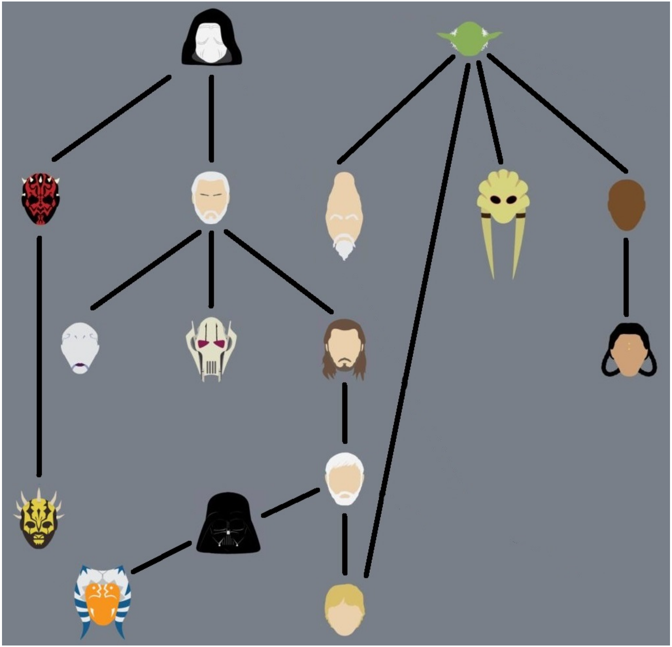
Příklad Hasseova diagramu: $(2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$

Příklad Hasseova diagramu: $(2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$



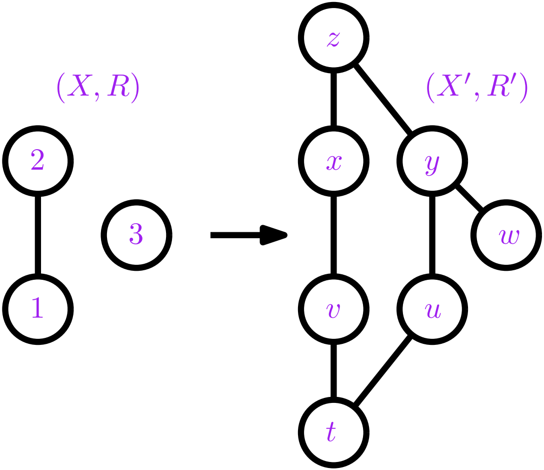
Příklad Hasseova diagramu: Star Wars

Příklad Hasseova diagramu: Star Wars

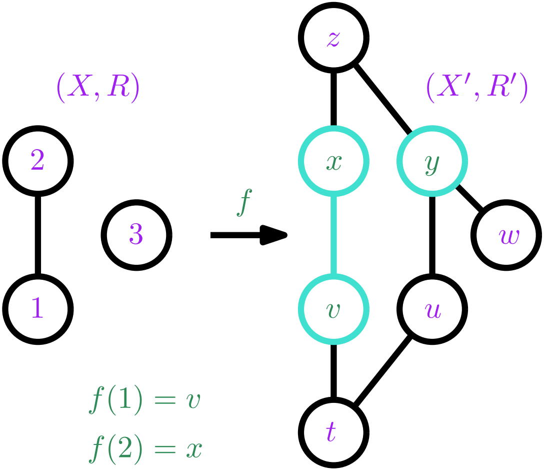


Příklad vnoření $f : (X, R) \to (X', R')$

Příklad vnoření $f : (X, R) \to (X', R')$



Příklad vnoření $f\colon (X, R) \to (X', R')$

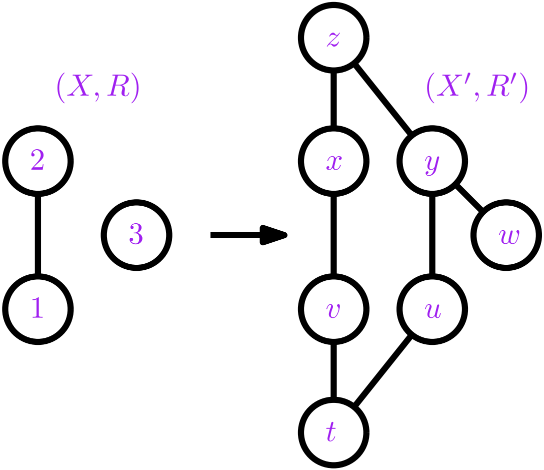


$f(1) = v$

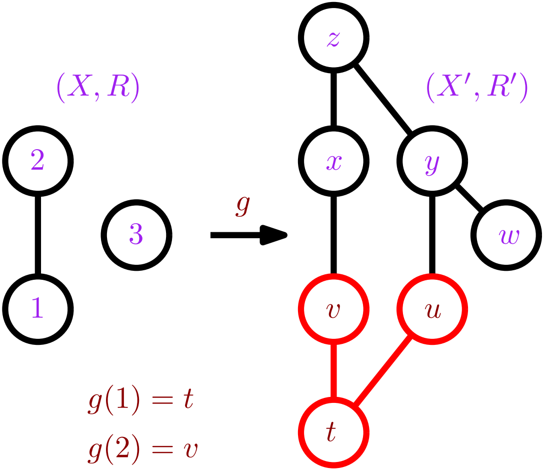
$f(2) = x$

$f(3) = y$

Příklad funkce $g\colon (X, R) \to (X', R')$, která není vnoření



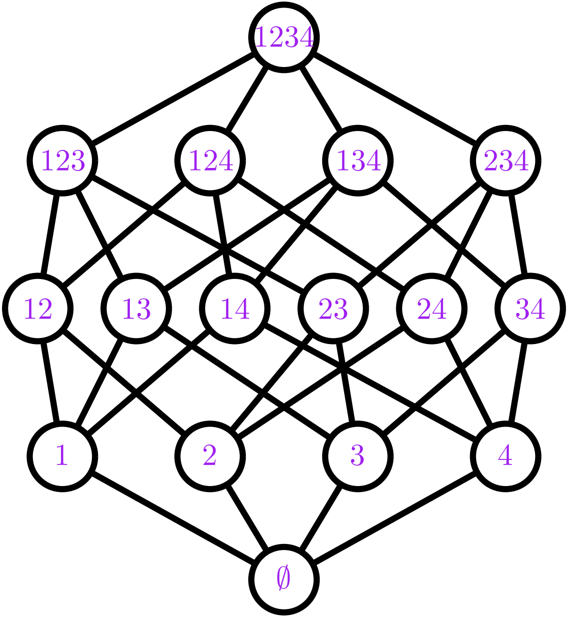
Příklad funkce $g\colon (X, R) \to (X', R')$, která není vnoření



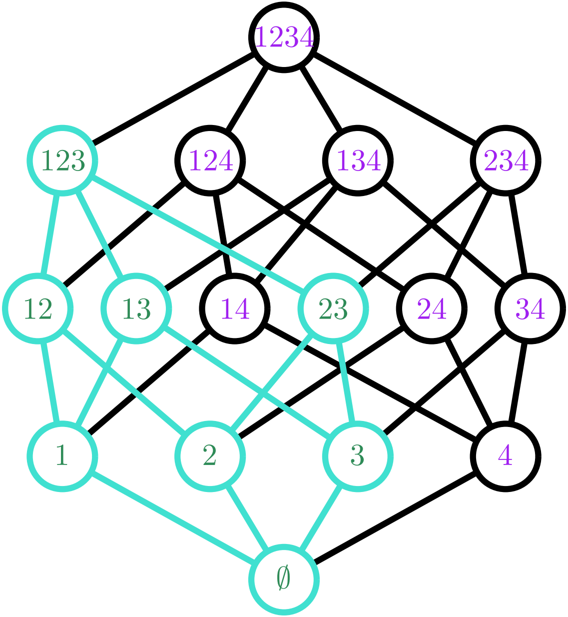
$$g(1) = t$$
$$g(2) = v$$
$$g(3) = u$$

Příklad vnoření $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq) \to (2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$

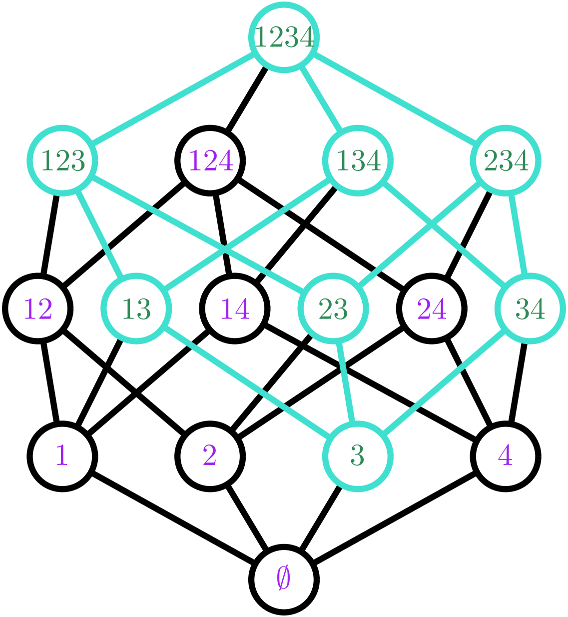
Příklad vnoření $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq) \to (2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$



Příklad vnoření $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq) \to (2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$



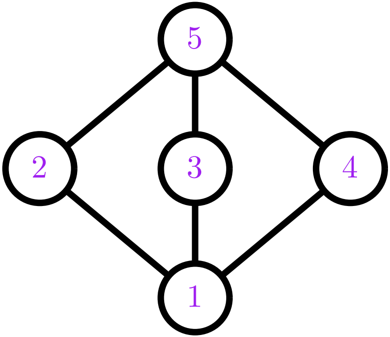
Jiný příklad vnoření $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq) \to (2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$

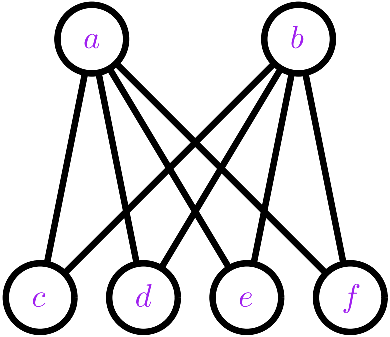


Příklady antiřetězců a řetězců

Příklady antiřetězců a řetězců

$P_1 = (X_1, R_1)$ $P_2 = (X_2, R_2)$

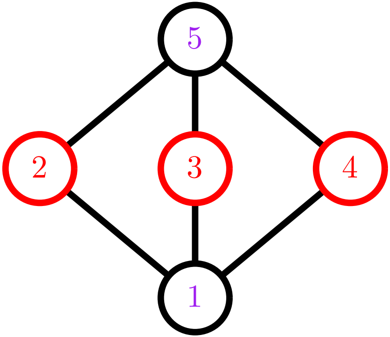


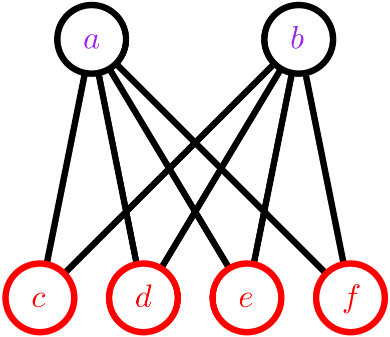


Příklady antiřetězců a řetězců

$P_1 = (X_1, R_1)$

$P_2 = (X_2, R_2)$



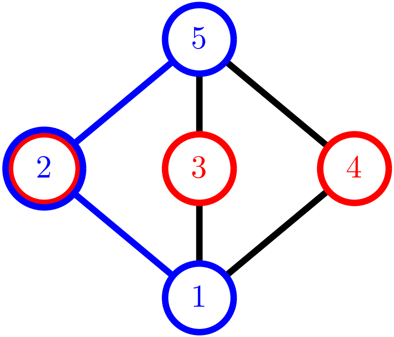


$\alpha(P_1) = 3$

$\alpha(P_2) = 4$

Příklady antiřetězců a řetězců

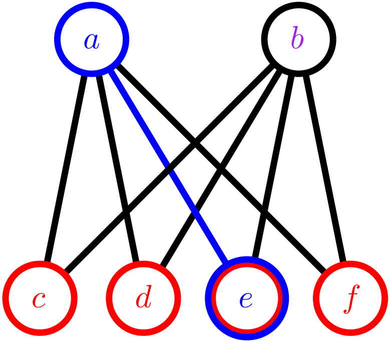
$$P_1 = (X_1, R_1)$$



$$\alpha(P_1) = 3$$

$$\omega(P_1) = 3$$

$$P_2 = (X_2, R_2)$$

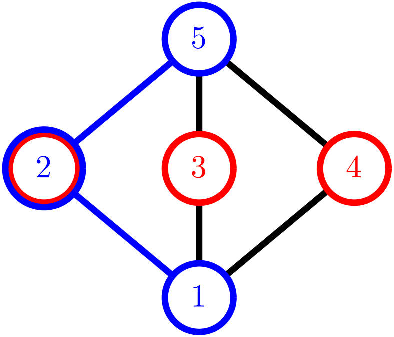


$$\alpha(P_2) = 4$$

$$\omega(P_2) = 2$$

Příklady antiřetězců a řetězců

$$P_1 = (X_1, R_1)$$

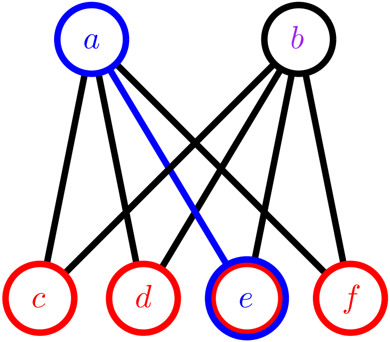


$$\alpha(P_1) = 3$$

$$\omega(P_1) = 3$$

$$|X_1| = 5 \leq 9 = \alpha(P_1) \cdot \omega(P_1)$$

$$P_2 = (X_2, R_2)$$

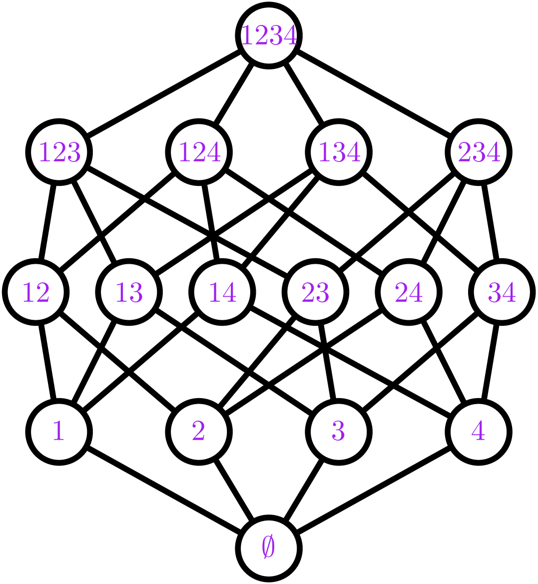


$$\alpha(P_2) = 4$$

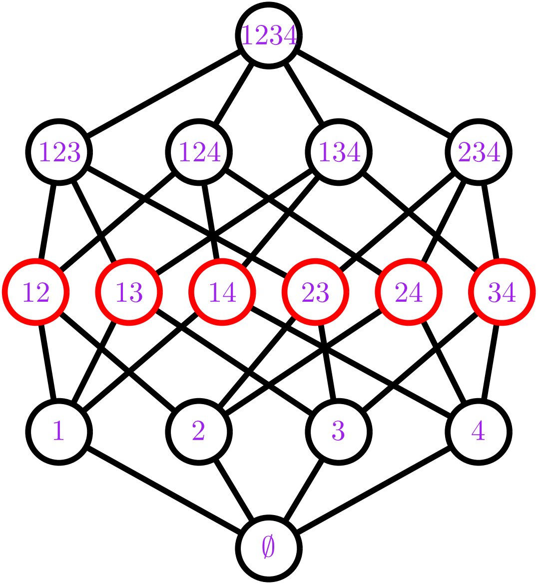
$$\omega(P_2) = 2$$

$$|X_2| = 6 \leq 8 = \alpha(P_2) \cdot \omega(P_2)$$

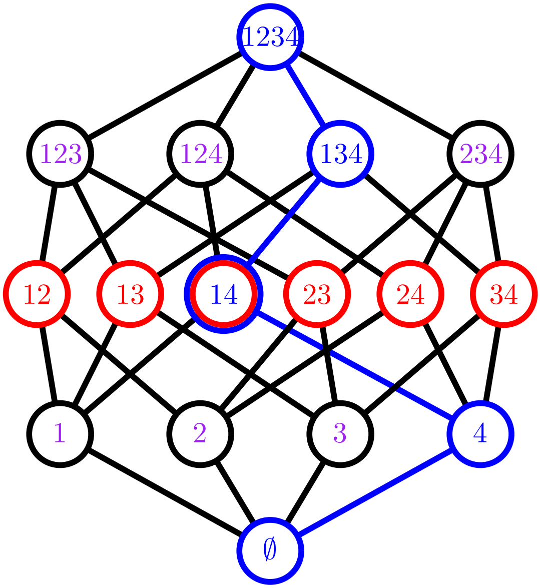
Příklad antiřetězce a řetězce v $Q = (2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$



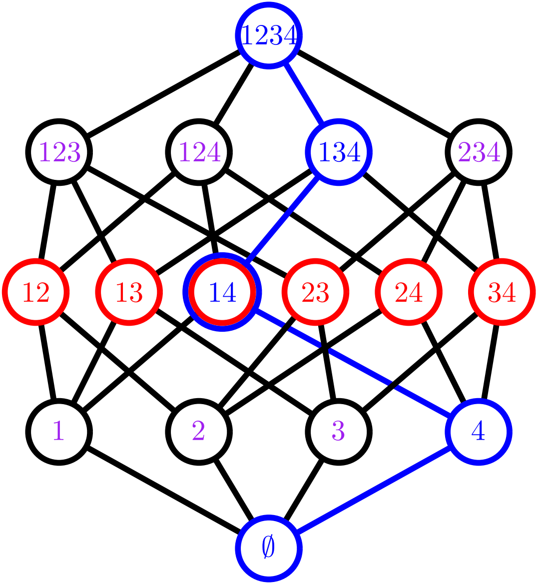
Příklad antiřetězce a řetězce v $Q = (2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$



Příklad antiřetězce a řetězce v $Q = (2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$



Příklad antiřetězce a řetězce v $Q = (2^{\{1,2,3,4\}}, \subseteq)$



$$|2^{\{1,2,3,4\}}| = 16 \leq 6 \cdot 5 = \alpha(Q) \cdot \omega(Q)$$

Erdősovo–Szekeresovo lemma

Erdősovo–Szekeresovo lemma

- Pro každé přirozená číslo n každá posloupnost aspoň $(n-1)^2+1$ čísel obsahuje monotónní podposloupnost délky n.

Erdősovo–Szekeresovo lemma

- Pro každé přirozená číslo n každá posloupnost aspoň $(n-1)^2+1$ čísel obsahuje monotónní podposloupnost délky n.
- Odhad dokázali Paul Erdős a George Szekeres v článku z roku 1935.

Erdősovo–Szekeresovo lemma

- Pro každé přirozená číslo n každá posloupnost aspoň $(n-1)^2+1$ čísel obsahuje monotónní podposloupnost délky n.
- Odhad dokázali Paul Erdős a George Szekeres v článku z roku 1935.

Obrázek: Paul Erdős (1913–1996) a George Szekeres (1911–2005).

Zdroje: http://en.wikipedia.org a http://quantamagazine.org

Zdroj: „The Boy Who Loved Math: The Improbable Life of Paul Erdős“ (Heiligman)

Zdroj: „The Boy Who Loved Math: The Improbable Life of Paul Erdős" (Heiligman)

Děkuji za pozornost.