

Diskrétní matematika

Martin Balko

2. přednáška

8. října 2019



Relace na množinách

Příklady relací

- Příklady relací R na množině X zahrnují:

Příklady relací

- Příklady relací R na množině X zahrnují:
 - **dělitelnost**: $(X, R) = (\mathbb{N}, |)$, tedy $x | y \Leftrightarrow x$ dělí y ,

Příklady relací

- Příklady relací R na množině X zahrnují:
 - **dělitelnost**: $(X, R) = (\mathbb{N}, |)$, tedy $x | y \Leftrightarrow x$ dělí y ,
 - **uspořádání**: $(X, R) = (\mathbb{Z}, \leq)$, tedy $x \leq y \Leftrightarrow x$ je nanejvýš y ,

Příklady relací

- Příklady relací R na množině X zahrnují:
 - **dělitelnost**: $(X, R) = (\mathbb{N}, |)$, tedy $x | y \Leftrightarrow x$ dělí y ,
 - **uspořádání**: $(X, R) = (\mathbb{Z}, \leq)$, tedy $x \leq y \Leftrightarrow x$ je nanejvýš y ,
 - **přesmyčky**: $X = \{\text{dvojice slov}\}$ a $xRy \Leftrightarrow x$ je přesmyčkou y .

Příklady relací

- Příklady relací R na množině X zahrnují:
 - **dělitelnost**: $(X, R) = (\mathbb{N}, |)$, tedy $x | y \Leftrightarrow x$ dělí y ,
 - **uspořádání**: $(X, R) = (\mathbb{Z}, \leq)$, tedy $x \leq y \Leftrightarrow x$ je nanejvýš y ,
 - **přesmyčky**: $X = \{\text{dvojice slov}\}$ a $xRy \Leftrightarrow x$ je přesmyčkou y .
 - $(\text{KAVÁRNA SLAVIA}, \text{SLAVNÁ AKVARIA}) \in R$,

Příklady relací

- Příklady relací R na množině X zahrnují:
 - **dělitelnost**: $(X, R) = (\mathbb{N}, |)$, tedy $x | y \Leftrightarrow x$ dělí y ,
 - **uspořádání**: $(X, R) = (\mathbb{Z}, \leq)$, tedy $x \leq y \Leftrightarrow x$ je nanejvýš y ,
 - **přesmyčky**: $X = \{\text{dvojice slov}\}$ a $xRy \Leftrightarrow x$ je přesmyčkou y .
 - (KAVÁRNA SLAVIA, SLAVNÁ AKVARIA) $\in R$,
 - (MARTIN BALKO,

Příklady relací

- Příklady relací R na množině X zahrnují:
 - **dělitelnost**: $(X, R) = (\mathbb{N}, |)$, tedy $x | y \Leftrightarrow x$ dělí y ,
 - **uspořádání**: $(X, R) = (\mathbb{Z}, \leq)$, tedy $x \leq y \Leftrightarrow x$ je nanejvýš y ,
 - **přesmyčky**: $X = \{\text{dvojice slov}\}$ a $xRy \Leftrightarrow x$ je přesmyčkou y .
 - $(\text{KAVÁRNA SLAVIA}, \text{SLAVNÁ AKVARIA}) \in R$,
 - $(\text{MARTIN BALKO}, \text{OBAL NAKRMIT}) \in R$,

Příklady relací

- Příklady relací R na množině X zahrnují:
 - **dělitelnost**: $(X, R) = (\mathbb{N}, |)$, tedy $x | y \Leftrightarrow x$ dělí y ,
 - **uspořádání**: $(X, R) = (\mathbb{Z}, \leq)$, tedy $x \leq y \Leftrightarrow x$ je nanejvýš y ,
 - **přesmyčky**: $X = \{\text{dvojice slov}\}$ a $xRy \Leftrightarrow x$ je přesmyčkou y .
 - (KAVÁRNA SLAVIA, SLAVNÁ AKVARIA) $\in R$,
 - (MARTIN BALKO, OBAL NAKRMIT) $\in R$,
 - (DVOJICE SLOV,

Příklady relací

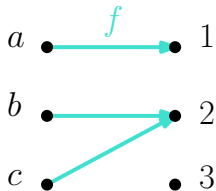
- Příklady relací R na množině X zahrnují:
 - **dělitelnost**: $(X, R) = (\mathbb{N}, |)$, tedy $x | y \Leftrightarrow x$ dělí y ,
 - **uspořádání**: $(X, R) = (\mathbb{Z}, \leq)$, tedy $x \leq y \Leftrightarrow x$ je nanejvýš y ,
 - **přesmyčky**: $X = \{\text{dvojice slov}\}$ a $xRy \Leftrightarrow x$ je přesmyčkou y .
 - $(\text{KAVÁRNA SLAVIA}, \text{SLAVNÁ AKVARIA}) \in R$,
 - $(\text{MARTIN BALKO}, \text{OBAL NAKRMIT}) \in R$,
 - $(\text{DVOJICE SLOV}, \text{DVOJICE SLOV}) \in R$.

Příklady funkcí

- Příklady funkcí $f: X \rightarrow Y$ zahrnují:

Příklady funkcí

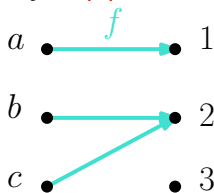
- Příklady funkcí $f: X \rightarrow Y$ zahrnují:
 - $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 2$,



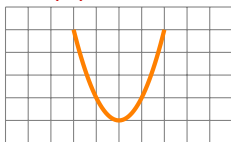
Příklady funkcí

- Příklady funkcí $f: X \rightarrow Y$ zahrnují:

- $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 2$,



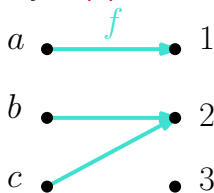
- parabola: $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$,



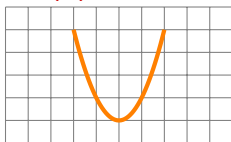
Příklady funkcí

- Příklady funkcí $f: X \rightarrow Y$ zahrnují:

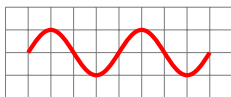
- $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 2$,



- parabola: $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$,

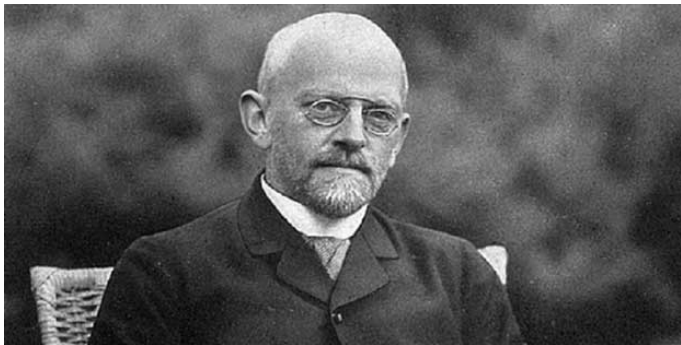


- sinus: $X = \mathbb{R}$, $Y = [-1, 1]$, $f(x) = \sin(x)$,
 $f = \{(x, \sin(x)) : x \in \mathbb{R}\}$.



David Hilbert

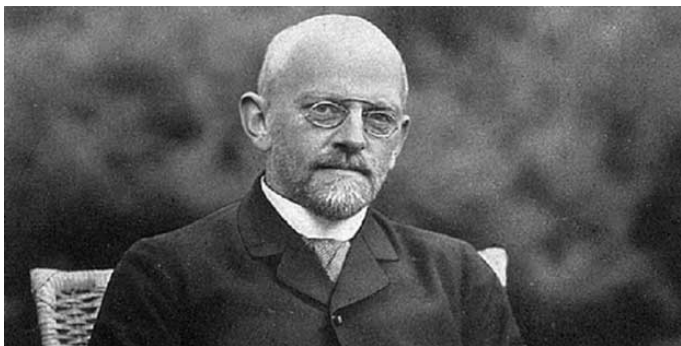
David Hilbert



Obrázek: David Hilbert (1862–1943).

Zdroj: <https://www.famousmathematicians.net>

David Hilbert

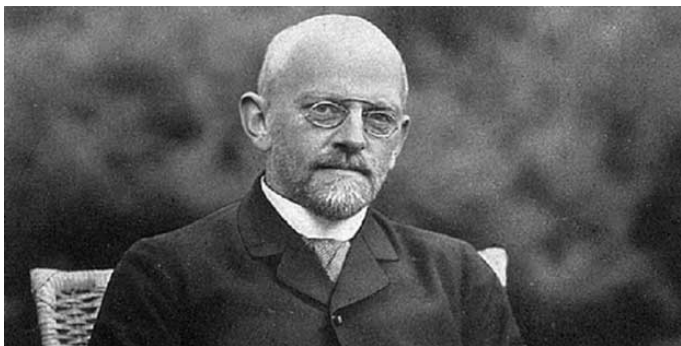


Obrázek: David Hilbert (1862–1943).

Zdroj: <https://www.famousmathematicians.net>

- Jeden z největších matematiků 20. století.

David Hilbert

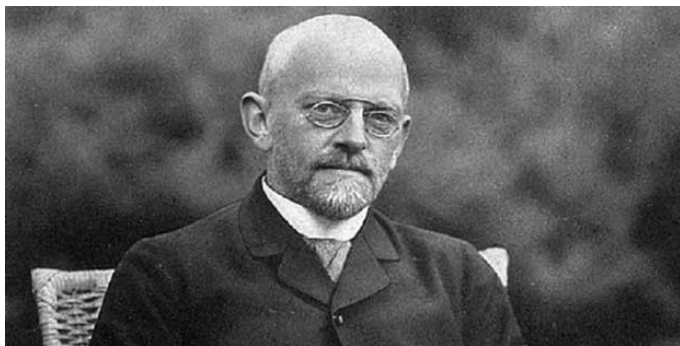


Obrázek: David Hilbert (1862–1943).

Zdroj: <https://www.famousmathematicians.net>

- Jeden z největších matematiků 20. století.
- V roce 1900 vypracoval seznam 23 Hilbertových problémů, tehdy největší nevyřešené matematické problémy.

David Hilbert



Obrázek: David Hilbert (1862–1943).

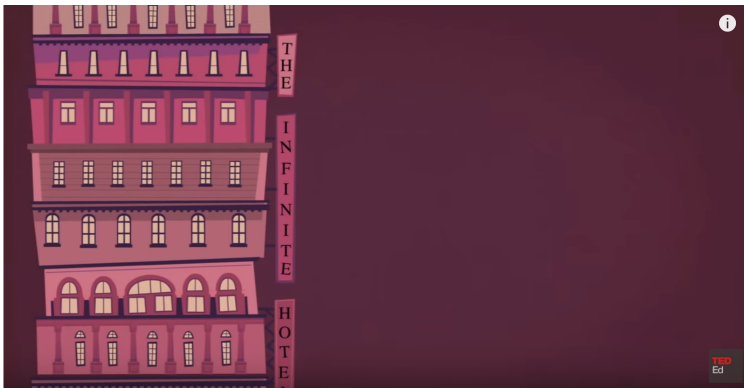
Zdroj: <https://www.famousmathematicians.net>

- Jeden z největších matematiků 20. století.
- V roce 1900 vypracoval seznam 23 **Hilbertových problémů**, tehdy největší nevyřešené matematické problémy.
- Ilustroval nepřirozené chování nekonečných množin pomocí tzv. **Hilbertova hotelu**.

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel

- Mějme hotel s nekonečně spočetně pokoji, které jsou všechny obsazené.



Zdroj: TED-Ed, https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_Kqkl9Zo

Hilbertův hotel

- Mějme hotel s nekonečně spočetně pokoji, které jsou všechny obsazené.

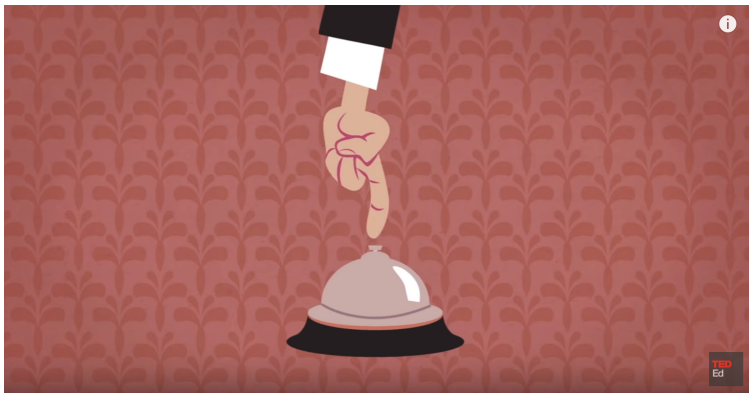


Zdroj: TED-Ed, https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_Kqkl9Zo

- Do hotelu přijde nový host a chce se ubytovat.

Hilbertův hotel

- Mějme hotel s nekonečně spočetně pokoji, které jsou všechny obsazené.

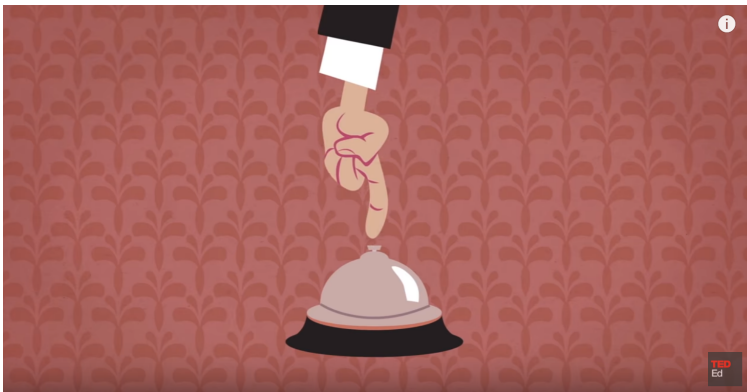


Zdroj: TED-Ed, https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

- Do hotelu přijde nový host a chce se ubytovat.

Hilbertův hotel

- Mějme hotel s nekonečně spočetně pokoji, které jsou všechny obsazené.



Zdroj: TED-Ed, https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_Kqkl9Zo

- Do hotelu přijde nový host a chce se ubytovat.
- Dokáže to recepční zařídit?

Hilbertův hotel

- Mějme hotel s nekonečně spočetně pokoji, které jsou všechny obsazené.



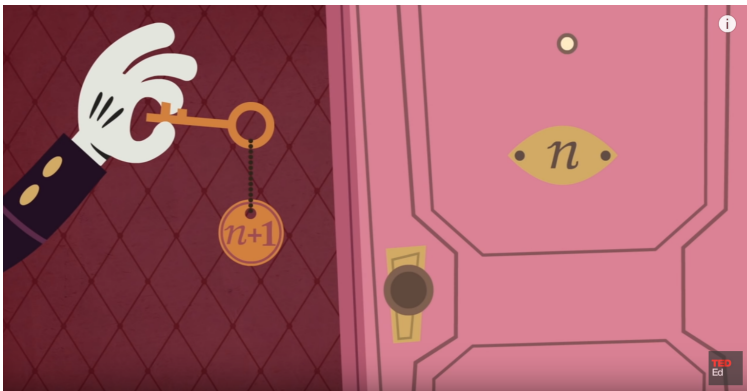
Zdroj: TED-Ed, <https://www.youtube.com/watch?v=Uj3..Kqkl9Zo>

- Do hotelu přijde nový host a chce se ubytovat.
- Dokáže to recepční zařídit?

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel

- Ano, stačí každého hosta z n -tého pokoje přesunout do $n + 1$ -ního pokoje, čímž se první pokoj uvolní.



Zdroj: TED-Ed, https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

Hilbertův hotel

- Ano, stačí každého hosta z n -tého pokoje přesunout do $n + 1$ -ního pokoje, čímž se první pokoj uvolní.



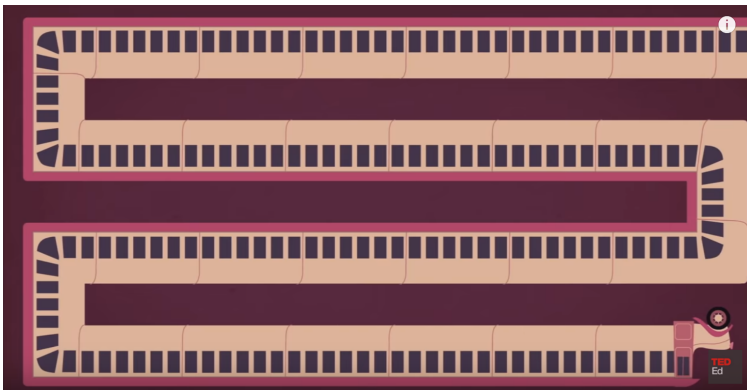
Zdroj: TED-Ed, https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

Hilbertův hotel

- Co když přijede autobus nekonečně spočetně mnoha hosty, kteří chtějí ubytovat?

Hilbertův hotel

- Co když přijede autobus nekonečně spočetně mnoha hosty, kteří chtějí ubytovat?

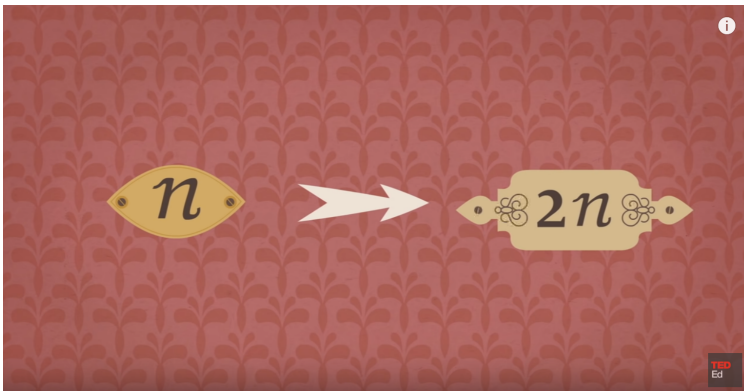


Zdroj: TED-Ed, https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

Hilbertův hotel

Hilbertův hotel

- **Stále lze zařídit**, stačí každého hosta z n -tého pokoje přesunout do $2n$ -tého pokoje, čímž se uvolní pokoje s lichým číslem.



Zdroj: TED-Ed, https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

Hilbertův hotel

- **Stále lze zařídit**, stačí každého hosta z n -tého pokoje přesunout do $2n$ -tého pokoje, čímž se uvolní pokoje s lichým číslem.



Zdroj: TED-Ed, https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_KqkI9Zo

Hilbertův hotel

- **Na rozmyšlenou:** ukažte, že hosty lze ubytovat, i když přijede nekonečně spočetně autobusů, každý s nekonečně spočetně mnoha hosty.

Hilbertův hotel

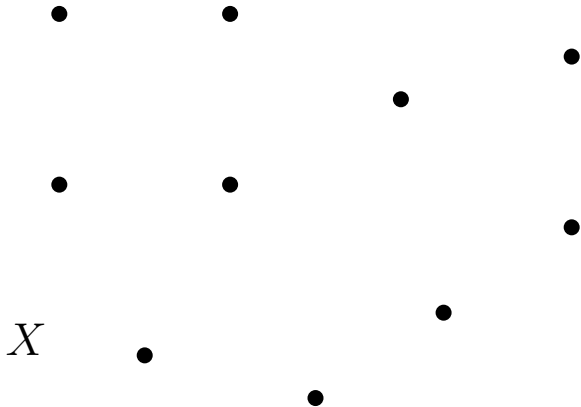
- **Na rozmyšlenou:** ukažte, že hosty lze ubytovat, i když přijede nekonečně spočetně autobusů, každý s nekonečně spočetně mnoha hosty.



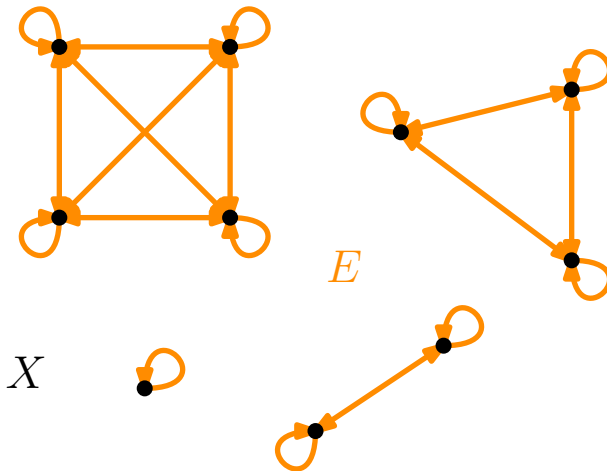
Zdroj: TED-Ed, https://www.youtube.com/watch?v=Uj3_Kqk19Zo

Ekvivalence

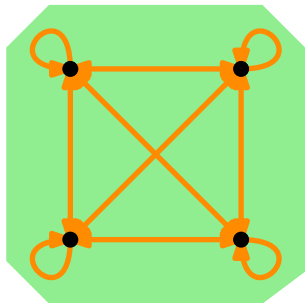
Ekvivalence



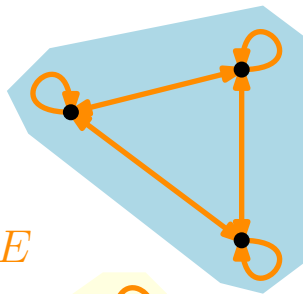
Ekvivalence



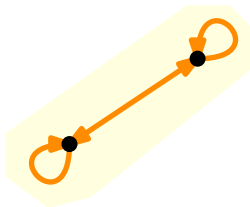
Ekvivalence



E

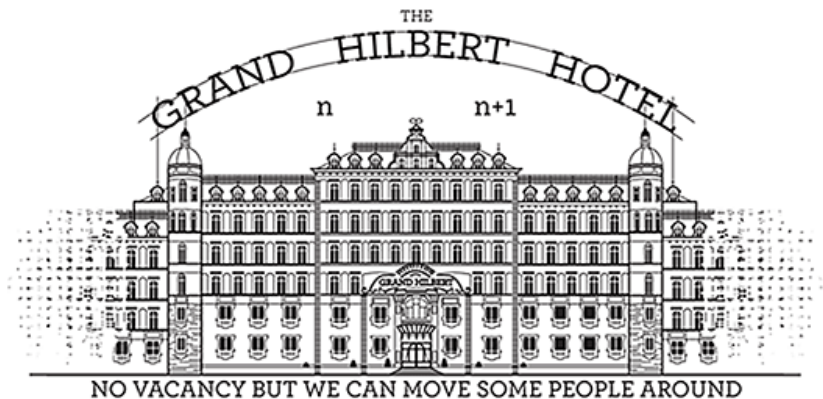


X





Zdroj: <https://www.ias.edu>



Zdroj: <https://www.ias.edu>

Děkuji za pozornost.