

Diskrétní matematika — příklady na 6. cvičení

5. listopadu 2019

1 Princip inkluze a exkluze

Věta 1 (Princip inkluze a exkluze). *Pro každý soubor konečných množin A_1, A_2, \dots, A_n platí*

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\dots,n\}}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Příklad 1. *Ve třídě je 30 žáků, z nichž 12 má rádo matematiku, 14 fyziku a 13 chemii. Také víme, že 5 má rádo matematiku i fyziku, 7 fyziku i chemii a 4 žáci mají rádi matematiku i chemii. Tři žáci mají rádi všechny tři předměty. Kolik žáků nemá rádo ani jeden předmět?*

Příklad 2. *Kolik čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 1000\}$ je dělitelných 7, 10 nebo 15?*

Příklad 3. *Nechť m, n jsou přirozená čísla taková, že platí $m \geq n$. Jaký je počet surjektivních zobrazení typu $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$?*

Příklad 4. *Kolik existuje pořadí písmen $A, B, D, E, I, K, M, N, R, U, Z$ takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov $BAR, DEN, RAZIE$?*

Příklad 5 (*). *Bud'*

$$\varphi(n) = |\{m \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \gcd(n, m) = 1\}|$$

Eulerova funkce. Pomocí principu inkluze a exkluze ukažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

kde $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ pro přirozená čísla r, e_1, \dots, e_r a prvočísla p_1, \dots, p_r je prvočíselný rozklad n .