Diskrétní matematika – příklady na 2. cvičení*

8. října 2019

1 Relace

(Binární) relace R je množina uspořádaných párů. Neboli $R \subseteq X \times Y$, kde X a Y jsou nějaké množiny. Je-li $X = Y$, tak mluvíme o *relaci na* X. Fakt, že prvky $x \in X$ a $y \in Y$ jsou v relaci R, zapisujeme $(x, y) \in R$ nebo xRy. Jsou-li X, Y, Z množiny a $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ jsou relace, pak *složení relací* $R \circ S$ značí relaci $T \subseteq X \times Z$, kde pro $x \in X$ a $z \in Z$ platí xTz právě tehdy, když existuje $y \in Y$ takové, že xRy a ySz. *Inverzní relací* R^{-1} k relaci $R \subseteq X \times Y$ rozumíme $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$. Relace $R \subseteq X \times X$ je

(a) *reflexivní*, pokud xRx pro každé $x \in X$;

(b) *symetrická*, pokud xRy implikuje yRx pro každé $x, y \in X$;

(c) *(slabě) antisymetrická*, pokud xRy a yRx implikuje $x = y$ pro každé $x, y \in X$;

(d) *tranzitivní*, pokud xRy a yRz implikuje xRz pro každé $x, y, z \in X$;

(e) *asymetrická* (či *(silně) antisymetrická*), pokud xRy implikuje $\neg(yRx)$ pro každé $x, y, z \in X$.

Jako *ekvivalenci* označujeme relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Příklad 1. *Kolik je na n-prvkové množině X relací? Kolik z nich je reflexivních? Kolik symetrických? Kolik relací je zároveň reflexivních a zároveň symetrických?*

Příklad 2. *Nechť R a S jsou ekvivalence na množině X. Rozhodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalence:*

(a) $R \cap S$

(b) $R \cup S$

(c) $R \setminus S$

(d) $R \circ S$

Příklad 3. *(a) Kolik existuje ekvivalencí na čtyřprvkové množině?*

(b) (*) Napadne vás vzoreček pro počet ekvivalencí na n-prvkové množině?

Příklad 4. *Dokažte, že relace R na množině X je tranzitivní právě tehdy, když $R \circ R \subseteq R$.*

2 Funkce

Zobrazení (respektive *funkce*) $f\colon X \to Y$ je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$, které je v relaci f s x. Funkce $f\colon X \to Y$ je

(a) *prostá* (neboli *injektivní*), pokud $f(x) \neq f(x')$ pro každé $x \neq x'$, $x, x' \in X$;

(b) *na* (neboli *surjektivní*), pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$;

(c) *vzájemně jednoznačná* (neboli *bijektivní*), pokud je prostá a na.

Jsou-li $f\colon X \to Y$ a $g\colon Y \to Z$ funkce, pak jejich *složení* označujeme jako $g \circ f$ a jedná se o funkci $h\colon X \to Z$ danou předpisem $x \mapsto g(f(x))$. Všimněte si, že skládání je značené jinak než u relací!

Příklad 5. *Najděte příklad*

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

(a) *prosté funkce* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, která není na,*

(b) *funkce* $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, která je na, ale není prostá.*

Příklad 6. *Nechť* $f\colon X \to Y$ *a* $g\colon Y \to Z$ *jsou zobrazení. Nechť* $g \circ f$ *je prosté.*

(a) *Rozhodněte, zda* f *musí být prosté.*

(b) *Rozhodněte, zda* g *musí být prosté.*

Příklad 7. *Jaký je počet všech zobrazení* $f\colon \{1, 2, \dots, m\} \to \{1, 2, \dots, n\}$*? Co počet bijektivních zobrazení* $f\colon \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ *a prostých zobrazení* $f\colon \{1, 2, \dots, m\} \to \{1, 2, \dots, n\}$*?*