

# Diskrétní matematika — příklady na 11. cvičení

10. prosince 2019

## 1 Počty koster

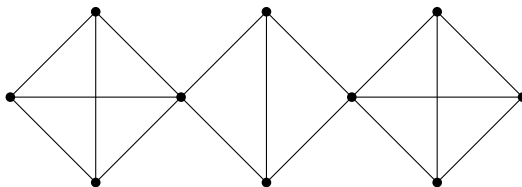
*Kostra* v grafu  $G = (V, E)$  je stromem  $T = (V, E')$  s  $E' \subseteq E$ . Neboli  $T$  je souvislým podgrafem grafu  $G$  na stejné množině vrcholů a  $T$  navíc neobsahuje cyklus. Graf má kostru právě tehdy, když je souvislý. Pro graf  $G$  označme jako  $\kappa(G)$  počet koster grafu  $G$ .

Z Cayleyho vzorce víme, že počet koster úplného grafu  $K_n$  na  $n$  vrcholech se rovná  $n^{n-2}$ .

**Příklad 1.** *Dokažte, že počet koster grafu  $K_n - e$ , který vznikne z  $K_n$  odebráním hrany, se rovná  $(n-2)n^{n-3}$ .*

*Nápověda: počítáním dvěma způsoby dokažte, že počet koster grafu  $K_n$ , které obsahují hranu  $e$ , se rovná  $2n^{n-3}$ .*

**Příklad 2.** *Určete počet koster grafu na obrázku.*



**Příklad 3.** *Spočtěte počet koster v následujících grafech:*

1.  $K_n \div e$ , tedy grafu  $K_n$  s jednou podrozdělenou hranou  $e$ ,
2.  $K_n \div E$ , tedy grafu  $K_n$  se všemi hranami podrozdělenými,
3.  $C_m \oplus_e C_n$ , tedy dvou cyklů slepených společnou hranou  $e$ ,
4.  $C_m \oplus K_n$ .

**Příklad 4.** *Spočtěte počet koster grafu, který vznikne slepením úplných grafů  $K_n$  a  $K_m$  přes společnou hranu.*

**Příklad 5.** *Mějme graf  $G$  na  $2n \geq 6$  vrcholech, vzniklý z disjunktního sjednocení dvou úplných grafů  $K_n$ , prvního na  $v_1, \dots, v_n$  a druhého na  $v_{n+1}, \dots, v_{2n}$ , přidáním dvou hran  $\{v_1, v_{n+1}\}$  a  $\{v_2, v_{n+2}\}$ . Určete počet koster grafu  $G$ . Kolik koster dostaneme pro  $n = 3$ ?*