

Diskrétní matematika — příklady na 10. cvičení

3. prosince 2019

1 Stromy

Strom je souvislý graf bez cyklů. Ekvivalentní definice jsou:

- (i) graf, kde každé dva vrcholy lze spojit jednoznačně určenou cestou,
- (ii) souvislý graf, který přestane být souvislý po odebrání libovolné hrany,
- (iii) graf bez cyklů, kde po přidání libovolné nové hrany už cyklus vznikne,
- (iv) souvislý graf s počtem hran o jedna menším než je počet vrcholů.

Nesouvislý graf, jehož každá komponenta souvislosti je stromem, se nazývá *les*. *Kostrou* souvislého grafu G označujeme podgraf grafu G , který obsahuje všechny vrcholy G a který je zároveň stromem.

Příklad 1. *Kolik je všech stromů s vrcholy $\{1, 2, 3, 4\}$? Nakreslete všechny neizomorfní stromy na 6 vrcholech.*

Příklad 2. *Dokažte, že každý souvislý graf G má kostru.*

Příklad 3. *Ukažte, že graf na n vrcholech s k komponentami souvislosti je lesem právě tehdy, když má $n - k$ hran.*

Příklad 4. *Dokažte, že graf $G = (V, E)$ je stromem právě tehdy, když neobsahuje kružnici a $|E| = |V| - 1$.*

Příklad 5. *Strom na 4152 vrcholech má pouze vrcholy stupně 1 a 3. Kolik minimálně a maximálně může mít listů?*

Příklad 6. *Nechť T je strom s aspoň dvěma vrcholy takový, že pro každou jeho hranu e mají obě komponenty v $T - e$ lichý počet vrcholů. Dokažte, že potom má každý vrchol v T lichý stupeň.*

Příklad 7. *Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu $K_{2,n}$.*