Diskrétní matematika
Zadání domácích úkolů

1. ledna 2020

1 Zadáno 1. 10. 2019 (Termín odevzdání 15. 10. 2019)

Příklad 1. *Chceme rozlámat tabulku čokolády s $m \times n$ dílky na jednotlivé dílky. Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?* **[3]**

Příklad 2. *Jaký je počet slov délky n nad abecedou $\{A, B\}$, ve kterých se nevyskytují dvě po sobě jdoucí písmena B?* **[2]**

Příklad 3. *Alice si přinesla tři svoje vlastní šestistěnné kostky (červenou, žlutou a modrou) a chce si s vámi zahrát hru, ve které budete každý házet svou na začátku vybranou kostkou, přičemž v každém kole vyhraje ten, komu padne vyšší číslo. Navíc si můžete jako první vybrat kostku, se kterou pak budete celou dobu házet. Kostky jsou spravedlivé, na červené jsou dvě trojky, dvě čtyřky a dvě osmičky, na žluté jsou dvě jedničky, dvě pětky a dvě devítky a na modré jsou dvě dvojky, dvě šestky a dvě sedmičky. Jakou kostku byste si zvolili?* **[3]**

Příklad 4. *Na vodorovné tyči dlouhé 1 metr je 25 mravenců. V čase 0 se každý mravenec začne pohybovat rychlostí 1cm/s podél tyče v jednom ze dvou možných směrů (vlevo nebo vpravo). Pokud dojde na okraj tyče, spadne dolů. Pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout a místo toho se oba otočí čelem vzad a pokračují v pohybu opačným směrem. Dokažte, že nejpozději za 100 sekund všichni mravenci popadají.* **[2]**

2 Zadáno 15. 10. 2019 (Termín odevzdání 5. 11. 2019)

Příklad 5. *Najděte příklad dvojice relací (R, S) na X takové, že R i S jsou tranzitivní, ale $R \cup S$, $R \setminus S$ ani $R \Delta S$ tranzitivní nejsou. Operace symetrický rozdíl $R \Delta S$ vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin R a S, formálně $R \Delta S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$.* **[3]**

Příklad 6. *Dokažte, že platí $R \circ R^{-1} = \Delta_X$, je-li relace $R \circ R^{-1}$ reflexivní a slabě antisymetrická. Symbolem Δ_X značíme nejmenší reflexivní relaci na množině X:* **[3]**

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Příklad 7. *Dokažte, že uspořádaná množina $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ má nekonečně mnoho minimálních prvků. O která čísla se jedná? Nakreslete příslušný Hasseův diagram na prvcích $2, 3, \ldots, 15$.* **[2]**

Příklad 8. *Nakreslete Hasseův diagram částečně uspořádané množiny $(\{2^k 3^l : k, l \in \mathbb{N}\}, |)$ (množina čísel dělitelných pouze 2 a 3 uspořádaná relací dělitelnosti).* **[2]**

Příklad 9. *Kolik nul má na konci číslo $100!$? Jak je tomu v pětkové soustavě? Co v binární? (Svá tvrzení dokažte bez použití počítače.)* **[3]**

3 Zadáno 29. 10. 2019 (Termín odevzdání 19. 11. 2019)

Příklad 10. *Nechť k, n jsou přirozená čísla. Dokažte, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$.* **[3]**
Hint: zkuste uvážit kombinatorickou interpretaci.

Příklad 11. *Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Maďary a 3 Rusy tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili jeden souvislý blok? Členy stejné národnosti mezi sebou rozlišujeme.* **[3]**

Příklad 12. *Pro $n \geq 100$ rozhodněte, čeho je více:* **[2]**

(a) zobrazení z n-prvkové množiny do tříprvkové množiny, nebo

(b) řetězců délky 5 v uspořádání $(\{1, 2, \dots, n\}, \leq)$?

Své rozhodnutí srozumitelně zdůvodněte, samotná nerovnost je téměř bezcenná.

Příklad 13. *Pro všechna celá čísla $n \geq r \geq 1$ dokažte, že platí* **[3]**

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

(Pozor! Při postupu matematickou indukcí podle n při pevném r nestačí jako začátek indukce zvolit $n = r = 1$.)

4 Zadáno 19. 11. 2019 (Termín odevzdání 3. 12. 2019)

Příklad 14. *Nechť $\check{s}(n)$ značí počet permutací bez pevného bodu na n-prvkové množině. Dokažte vztah* **[3]**

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

Příklad 15. *Mějme množinu S velikosti n. Ukažte, že počet jejích podmnožin, které mají lichou velikost, se rovná počtu jejích podmnožin sudé velikosti. Jakému číslu se daný počet rovná?* **[3]**

Příklad 16. *Mějme čísla r, m, $n \in \mathbb{N}$ taková, že platí $r \leq m \leq n$. Kombinatorickou interpretací dokažte, že platí* **[2]**

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}.$$

5 Zadáno 3. 12. 2019 (Termín odevzdání 17. 12. 2019)

Příklad 17. *Nalezněte chybu v následujícím důkazu tvrzení „Každý graf s alespoň třemi vrcholy a se všemi stupni velikosti alespoň dva obsahuje cyklus C_3.“* **[3]**

Důkaz. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n. Tvrzení platí v případě $n = 3$, protože daný graf může být jen C_3. Uvažme indukční krok, nechť G je graf na $n-1$ vrcholech se všemi stupni velikosti alespoň dva. Pro G tvrzení platí z indukčního předpokladu a tedy obsahuje C_3. Vytvoříme z G nový graf G' na n vrcholech přidáním nového vrcholu, který je incidentní s alespoň dvěma vrcholy z G. Protože G obsahoval cyklus C_3, tak jej G' obsahuje také. □

Příklad 18. *Pro každou dvojici přirozených čísel n, k, která splňuje podmínky $n \geq k+1$ a $2 \mid kn$, sestrojte k-regulární graf na n vrcholech.* **[3]**

Příklad 19. *Nechť T je strom s aspoň dvěma vrcholy takový, že pro každou jeho hranu e mají obě komponenty v $T - e$ lichý počet vrcholů. Dokažte, že potom má každý vrchol v T lichý stupeň.* **[4]**

Příklad 20. *Nechť T je strom s $n \geq 2$ vrcholy. Nechť p_i, $i \in \mathbb{N}$, označuje počet vrcholů v T stupně i. Ukažte, že platí* **[2]**

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \cdots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

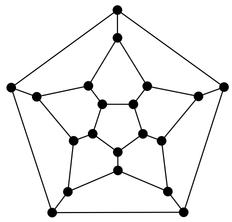
Příklad 21. *Nechť $T_1, T_2, \dots, T_k$ jsou podstromy stromu T takové, že každé dva mají neprázdný společný průnik. Ukažte, že potom existuje vrchol společný všem podstromům T_i, $i = 1, 2, \dots, k$.* **[4]**

6 Zadáno 15. 12. 2019 (Termín odevzdání 7. 1. 2020)

Příklad 22. *Dokažte, že graf $G = (V, E)$ je stromem právě tehdy, když neobsahuje kružnici a $|E| = |V| - 1$.* **[3]**

Příklad 23. *Mějme graf G na $2n \geq 6$ vrcholech, vzniklý z disjunktního sjednocení dvou úplných grafů K_n, prvního na $v_1, \dots, v_n$ a druhého na $v_{n+1}, \dots, v_{2n}$, přidáním dvou hran $\{v_1, v_{n+1}\}$ a $\{v_2, v_{n+2}\}$. Určete počet koster grafu G. Kolik koster dostaneme pro $n = 3$?* **[4]**

Příklad 24. *Nalezněte Hamiltonovskou kružnici pro pravidelný dvanáctistěn.* **[2]**

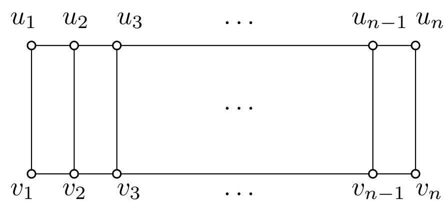


Příklad 25. *V orientovaném grafu hranám odpovídají uspořádané dvojice vrcholů (šipky mezi vrcholy), přičemž každý pár vrcholů tvoří nanejvýš jednu takovou dvojici. Ukažte, že každý orientovaný úplný graf obsahuje orientovanou Hamiltonovskou cestu (cestu obsahující všechny vrcholy tvořenou na sebe navazujícími šipkami stejného směru).* **[3]**

Příklad 26. *Ukažte, že každý graf G obsahuje vrchol u a množinu aspoň $\lfloor \frac{1}{2}\deg_G(u) \rfloor$ cyklů takových, že každé dva sdílejí pouze vrchol u a žádný jiný.* **[3]**

Hint: Uvažte nejdelší cestu v G.

Příklad 27. *Graf M nazveme* párováním*, pokud žádné dvě hrany v M nemají společný vrchol.* Perfektní párování *je párování, ve kterém hrany pokrývají všechny vrcholy. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ určete počet perfektních párování v žebříku Z_n:* **[3]**



7 Zadáno 7. 1. 2020 (Termín odevzdání 16. 2. 2020)

Příklad 28. *Ukažte, že doplněk rovinného grafu na alespoň jedenácti vrcholech není rovinný. Na kolika vrcholech ještě dokážete najít rovinné nakreslení grafu a jeho doplňku?* **[3]**

Příklad 29. *Dokažte, že každý rovinný graf, jehož vrcholy mají všechny stupně alespoň 5, má alespoň 12 vrcholů.* **[2]**

Příklad 30. *Nechť máme rovinné nakreslení grafu G, ve kterém jsou všechny stěny trojúhelníky. Předpokládejme, že vrcholy G jsou obarveny třemi barvami (nemusí se nutně jednat o korektní obarvení, tj. může existovat hrana s oběma koncovými vrcholy stejné barvy). Ukažte, že počet stěn, na jejichž vrcholech jsou použity všechny tři barvy, je sudý.* **[4]**

Nápověda: Uvažte počítání dvěma způsoby.

Příklad 31. *Pro $k \in \mathbb{N}$ označme jako $\mathbb{B}^k$ množinu binárních řetízků délky k. Uvažme graf $Q_k = (V, E)$, nazývaný k-krychle, ve kterém $V = \mathbb{B}^k$ a $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když se řetízky u a v liší na právě jedné pozici. Pro jaká k je Q_k ještě rovinný?* **[2]**

Příklad 32. *Buď G rovinný graf neobsahující K_3. Dokažte $\chi(G) \leq 4$.* **[3]**