# Diskrétní matematika — 9. cvičení

29. listopadu 2018

## 1 Základy pravděpodobnosti podruhé

*Rozdělení náhodné veličiny* $X$ je funkce z $\mathbb{R}$ do $[0,1]$ přiřazující každému $v \in \mathbb{R}$ hodnotu $P(X = v) = P(\{z \in \Omega\colon X(z) = v\})$. *Distribuční funkce* náhodné veličiny $X$ je funkce z $\mathbb{R}$ do $[0,1]$ přiřazující každému $v \in \mathbb{R}$ hodnotu $P(X \leq v) = P(\{z \in \Omega\colon X(z) \leq v\})$. *Rozptyl* náhodné veličiny $X$ je definován jako $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

**Markovova nerovnost.** *Pro nezápornou náhodnou veličinu $X$ se střední hodnotou $\mathbb{E}[X] = m > 0$ platí pro každé reálné číslo $t > 0$*

$$P(X \geq tm) \leq \frac{1}{t}.$$

**Čebyševova nerovnost.** *Pro nezápornou náhodnou veličinu $X$ se střední hodnotou $\mathbb{E}[X] = m$ platí pro každé reálné číslo $t > 0$*

$$P\left(|X - m| \geq t\sqrt{\mathrm{Var}[X]}\right) \leq \frac{1}{t^2}.$$

**Příklad 1.** *Určete distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl následujících rozdělení.*

*(a) Nula-jedničkové rozdělení: rozdělení náhodné veličiny $X$, která nabývá jen hodnot $0$ a $1$ s pravděpodobnostmi $1 - p$ a $p$ pro nějaké $p \in (0,1)$.*

*(b) Binomické rozdělení: rozdělení náhodné veličiny $X$, která nabývá hodnot $k = 0, 1, \ldots, n$ s pravděpodobnostmi $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0,1)$.*

*Hint: Při počítání rozptylu se může hodit vědět, že $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X]$.*

*(c) Poissonovo rozdělení: rozdělení náhodné veličiny $X$, která nabývá hodnot $k = 0, 1, \ldots$ s pravděpodobnostmi $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, kde $\lambda > 0$.*

*Hint: Při počítání se může hodit vědět, že $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.*

**Příklad 2.** *Mějme $n$ bodů v rovině, kde žádné tři neleží na společné přímce. Mezi každými dvěma body nakreslíme úsečku s pravděpodobností $1/2$.*

*(a) Pro $k \in \{1, \ldots, n\}$, jaká je střední hodnota počtu $X_n$ $k$-tic daných bodů takových, že mezi každým párem bodů této $k$-tice je nakreslená úsečka?*

*(b) Pro jak velké $k = k(n)$ téměř jistě nenajdeme žádnou $k$-tici takových bodů? Neboli pro jak velké $k = k(n)$ je $\lim_{n\to\infty} P(X_n \geq 1) = 0$?*

*Hint: Markovova nerovnost.*

**Příklad 3 (*).** *Monty Hall problem: Jste v televizní soutěži, ve které si jako výhru můžete odnést nové auto. Problémem je, že auto je schované za jedněmi ze tří dveří, za každými s toutéž pravděpodobností, a za zbýlymi dvěma dveřmi je jen kupka hnoje. K získání auta musíte ukázat na dveře, za kterými je auto schované. Na rozdíl od moderátora soutěže nevíte, které to jsou, a tak si vyberete uniformně náhodně jedny z nich. Moderátor poté zvolí jedny ze dveří, které jste nevybrali, a odhalí, že za nimi byla schovaná kupka hnoje (má-li moderátor na výběr z více dveří, které odhalit, také si vybere uniformně náhodně). Poté vám dá možnost si svou volbu rozmyslet a případně ukázat na druhé ještě neotevřené dveře. Za předpokladu, že raději vyhrajete nové auto než kupku hnoje, využijete jeho nabídku?*

**Příklad 4.** *Dokažte, že pro každé $m \geq 1$ platí*

$$\binom{2m}{m} \geq \frac{2^{2m}}{4\sqrt{m} + 2}.$$

*Hint: Uvažte náhodnou veličinu $X$, která je součtem $2m$ náhodných veličin nabývajících hodnot $0$ a $1$ s pravděpodobností $1/2$ a použijte Čebyševovu nerovnost.*

**Příklad 5.** *Mějme posloupnost $X_1, X_2, \ldots$ nezáporných náhodných veličin takových, že*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Var}[X_n]}{\mathbb{E}[X_n]^2} = 0.$$

*Dokžte, že*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n > 0) = 1.$$

*Hint: Čebyševova nerovnost.*