

Diskrétní matematika — 5. cvičení

1. listopadu 2018

1 Kombinatorické počítání

Počet možných uspořádání n -prvkové množiny je $n!$. Počet způsobů, kolika můžeme vybrat neuspořádanou k -tici z n -prvkové množiny, je $\binom{n}{k}$. Platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ a $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.

Příklad 1. (a) Kolika způsoby můžeme rozdat n korun mezi k lidí tak, aby každý dostal alespoň jednu korunu? Neboli, jaký je počet řešení $(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$ rovnice $i_1 + \dots + i_k = n$?

(b) Jak se počet změní v případě, že netrváme na tom, aby každý něco dostal? Neboli, jaký je počet řešení $(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_0^k$ rovnice $i_1 + \dots + i_k = n$?

Příklad 2. Dokažte následující identitu:

$$\sum_{i=d}^n \binom{n}{i} \binom{i}{d} = 2^{n-d} \binom{n}{n-d}.$$

2 Princip inkluze a exkluze

Věta 1 (Princip inkluze a exkluze). Pro každý soubor konečných množin A_1, A_2, \dots, A_n platí

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\dots,n\}}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Příklad 3. Ve třídě je 30 žáků, z nichž 12 má rádo matematiku, 14 fyziku a 13 chemii. Také víme, že 5 má rádo matematiku i fyziku, 7 fyziku i chemii a 4 žáci mají rádi matematiku i chemii. Tři žáci mají rádi všechny tři předměty. Kolik žáků nemá rádo ani jeden předmět?

Příklad 4. Kolik čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 1000\}$ je dělitelných 7, 10 nebo 15?

Příklad 5. Kolik existuje pořadí písmen $A, B, D, E, I, K, M, N, R, U, Z$ takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov $BAR, DEN, RAZIE$?

Příklad 6 (*). Bud'

$$\varphi(n) = |\{m \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \gcd(n, m) = 1\}|$$

Eulerova funkce. Pomocí principu inkluze a exkluze ukažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

kde $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ pro přirozená čísla r, e_1, \dots, e_r a prvočísla p_1, \dots, p_r je prvočíselný rozklad n .