Diskrétní matematika — 4. cvičení

25. října 2018

1 Funkce

Zobrazení (respektive *funkce*) $f: X \to Y$ je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$, které je v relaci f s x. Funkce $f: X \to Y$ je

(a) *prostá* (neboli *injektivní*), pokud $f(x) \neq f(x')$ pro každé $x \neq x'$, $x, x' \in X$;

(b) *na* (neboli *surjektivní*), pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$;

(c) *vzájemně jednoznačná* (neboli *bijektivní*), pokud je prostá a na.

Jsou-li $f: X \to Y$ a $g: Y \to Z$ funkce, pak jejich *složení* označujeme jako $g \circ f$ a jedná se o funkci $h: X \to Z$ danou předpisem $x \mapsto g(f(x))$. Všimněte si, že skládání je značené jinak než u relací!

Příklad 1. *Najděte příklad*

(a) prosté funkce $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která není na,

(b) funkce $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, která je na, ale není prostá.

Příklad 2. *Nechť $f: X \to Y$ a $g: Y \to Z$ jsou zobrazení. Nechť $g \circ f$ je prosté.*

(a) Rozhodněte, zda f musí být prosté.

(b) Rozhodněte, zda g musí být prosté.

Příklad 3. *Jaký je počet všech zobrazení $f: \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$? Co počet bijektivních zobrazení $f: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ a prostých zobrazení $f: \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$?*

2 Kombinatorické počítání

Počet možných uspořádání n-prvkové množiny je $n!$. Počet způsobů, kolika můžeme vybrat neuspořádanou k-tici z n-prvkové množiny, je $\binom{n}{k}$. Platí $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ a $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Příklad 4. *Z kolika hesel máme na výběr, pokud každé heslo může obsahovat pouze písmena z anglické abecedy a musí mít délku 8? Co když navíc může obsahovat jen právě jednu samohlásku?*

Příklad 5. *(a) Kolika způsoby můžeme rozdat n korun mezi k lidí tak, aby každý dostal alespoň jednu korunu? Neboli, jaký je počet řešení $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}^k$ rovnice $i_1 + \cdots + i_k = n$?*

(b) Jak se počet změní v případě, že netrváme na tom, aby každý něco dostal? Neboli, jaký je počet řešení $(i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}_0^k$ rovnice $i_1 + \cdots + i_k = n$?

Příklad 6. *(a) Pro přirozené číslo n dokažte algebraicky i kombinatoricky následující identitu:*

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

(b) Pro nezáporná celá čísla a, b, c, m dokažte následující identitu:

$$\sum_{i,j,k \geq 0, i+j+k=m} \binom{a}{i} \cdot \binom{b}{j} \cdot \binom{c}{k} = \binom{a+b+c}{m}.$$

Příklad 7. *Dokažte následující identitu:*

$$\sum_{i=d}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{d} = 2^{n-d}\binom{n}{n-d}.$$

Příklad 8 (*). *Kolik existuje k-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, v nichž se nevyskytují žádná dvě po sobě jdoucí čísla?*