

# Diskrétní matematika — 3. cvičení\*

18. října 2018

## 1 Částečná uspořádání

Relace  $\preceq$  na  $X$  se nazývá (částečné) uspořádání, jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní. Pár  $(X, \preceq)$  se nazývá částečně uspořádaná množina.

Máme-li nějaké částečné uspořádání  $\preceq$ , tak můžeme definovat odvozenou relaci *ostré nerovnosti*  $\prec$  takto:  $a \prec b$  právě tehdy, když  $a \preceq b$  a  $a \neq b$ . Také lze definovat *obrácenou nerovnost*, tedy relaci  $\succeq$ , vztahem  $a \succeq b \Leftrightarrow b \preceq a$ .

*Hasseův diagram* je znázornění částečně uspořádané množiny  $(X, \preceq)$ , kde každý prvek množiny  $X$  tvoří bod (vrchol). Dva vrcholy  $x$  a  $y$  se spojí čarou (hranou) vedenou zdola nahoru od  $x$  k  $y$ , jestliže  $x \prec y$  a neexistuje  $z \in X$  takové, že  $x \prec z \prec y$ .

Částečné uspořádání  $\preceq$  na  $X$  je *lineární*, pokud pro každé  $x, y \in X$  platí  $x \preceq y$  nebo  $y \preceq x$ .

Prvek  $a \in X$  nazýváme *minimálním prvkem*  $(X, \preceq)$ , pokud neexistuje žádné  $x \in X$  takové, že  $x \prec a$ . *Maximální prvek*  $a$  je definován podobně (neexistuje žádné  $x \succ a$ ).

Prvek  $a \in X$  nazýváme *nejmenším prvkem*  $(X, \preceq)$ , jestliže pro každé  $x \in X$  platí  $a \preceq x$ . Podobně definujeme *největší prvek* ( $x \preceq a$  pro každé  $x \in X$ ).

**Příklad 1.** Uvažme relaci  $\preceq$  na množině  $\mathbb{R}^3$  definovanou předpisem

$$(a_1, b_1, c_1) \preceq (a_2, b_2, c_2) \Leftrightarrow (a_1 \geq a_2 \ \& \ b_1 \geq b_2 \ \& \ c_1 \leq c_2).$$

Jedná se o částečné uspořádání?

**Příklad 2.** (a) Ukažte, že největší prvek je maximální, a ukažte příklad uspořádané množiny, která má maximální prvek, ale nemá největší prvek.

(b) Uvažme uspořádanou množinu  $(\mathbb{N}, \preceq)$ , kde  $x \preceq y \Leftrightarrow y \mid x$  (tj.  $x$  je dělitelné prvkem  $y$ ). Rozhodněte, zda má nejmenší prvek. Má minimální? Maximální? Největší?

**Příklad 3.** Dokažte, že pro konečné  $X$  každá částečně uspořádaná množina  $(X, \preceq)$  obsahuje minimální prvek.

**Příklad 4.** Dokažte, že pro lineárně uspořádané množiny je každý minimální prvek rovněž nejmenší.

**Příklad 5.** (a) Necht'  $\preceq_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , jsou uspořádání na nějaké množině  $X$ . Ukažte, že  $\bigcap_{i=1}^k \preceq_i$  je opět uspořádání. (Uvědomte si, že každé  $\preceq_i$ , jakožto relace, je podmnožinou  $X \times X$ .)

(b) (\*) Dokažte, že libovolné částečné uspořádání  $\preceq$  na konečné množině  $X$  se dá vyjádřit jako průnik lineárních uspořádání.

*Hint:* Pro částečně uspořádanou množinu  $(X, \preceq)$  a neporovnatelné prvky  $a, b \in X$  v relaci  $\preceq$ , uvažte relaci  $\preceq_{a,b} = \preceq$  na  $X$ , kde  $x \preceq_{a,b} y$ , právě tehdy, když  $x \preceq y \vee (x \leq a \ \& \ b \leq y)$ .

## 2 Funkce

Zobrazení (respektive funkce)  $f: X \rightarrow Y$  je relace  $f \subseteq X \times Y$  taková, že pro každé  $x \in X$  existuje právě jedno  $y \in Y$ , které je v relaci  $f$  s  $x$ . Funkce  $f: X \rightarrow Y$  je

(a) *prostá* (neboli *injektivní*), pokud  $f(x) \neq f(x')$  pro každé  $x \neq x'$ ,  $x, x' \in X$ ;

(b) *na* (neboli *surjektivní*), pokud pro každé  $y \in Y$  existuje  $x \in X$  takové, že  $f(x) = y$ ;

(c) *vzájemně jednoznačná* (neboli *bijektivní*), pokud je prostá a na.

Jsou-li  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow Z$  funkce, pak jejich *složení* označujeme jako  $g \circ f$  a jedná se o funkci  $h: X \rightarrow Z$  danou předpisem  $x \mapsto g(f(x))$ . Všimněte si, že skládání je značené jinak než u relací!

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

**Příklad 6.** *Najděte příklad*

(a) *prosté funkce  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , která není na,*

(b) *funkce  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , která je na, ale není prostá.*

**Příklad 7.** *Nechť  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow Z$  jsou zobrazení. Nechť  $g \circ f$  je prosté.*

(a) *Rozhodněte, zda  $f$  musí být prosté.*

(b) *Rozhodněte, zda  $g$  musí být prosté.*