

# Diskrétní matematika – příklady na 2. cvičení\*

11. října 2018

## 1 Relace

(Binární) relace  $R$  je množina uspořádaných párů. Neboli  $R \subseteq X \times Y$ , kde  $X$  a  $Y$  jsou nějaké množiny. Je-li  $X = Y$ , tak mluvíme o *relaci na  $X$* . Fakt, že prvky  $x \in X$  a  $y \in Y$  jsou v relaci  $R$ , zapisujeme  $(x, y) \in R$  nebo  $xRy$ . Jsou-li  $X, Y, Z$  množiny a  $R \subseteq X \times Y$ ,  $S \subseteq Y \times Z$  jsou relace, pak *složení relací*  $R \circ S$  značí relaci  $T \subseteq X \times Z$ , kde pro  $x \in X$  a  $z \in Z$  platí  $xTz$  právě tehdy, když existuje  $y \in Y$  takové, že  $xRy$  a  $ySz$ . *Inverzní relací*  $R^{-1}$  k relaci  $R \subseteq X \times Y$  rozumíme  $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ . Relace  $R \subseteq X \times X$  je

- (a) *reflexivní*, pokud  $xRx$  pro každé  $x \in X$ ;
- (b) *symetrická*, pokud  $xRy$  implikuje  $yRx$  pro každé  $x, y \in X$ ;
- (c) (*slabě*) *antisymetrická*, pokud  $xRy$  a  $yRx$  implikuje  $x = y$  pro každé  $x, y \in X$ ;
- (d) *tranzitivní*, pokud  $xRy$  a  $yRz$  implikuje  $xRz$  pro každé  $x, y, z \in X$ ;
- (e) *asymetrická* (či (*silně*) *antisymetrická*), pokud  $xRy$  implikuje  $\neg(yRx)$  pro každé  $x, y, z \in X$ .

Jako *ekvivalenci* označujeme relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Jako *částečné uspořádání* označujeme relaci, která je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní.

**Příklad 1.** *Kolik je na  $n$ -prvkové množině  $X$  relací? Kolik z nich je reflexivních? Kolik symetrických? Kolik relací je zároveň reflexivních a zároveň symetrických?*

**Příklad 2.** *Nechť  $R$  a  $S$  jsou ekvivalence na množině  $X$ . Rozhodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalence:*

- (a)  $R \cap S$
- (b)  $R \cup S$
- (c)  $R \setminus S$
- (d)  $R \circ S$

**Příklad 3.** (a) *Kolik existuje ekvivalencí na čtyřprvkové množině?*

(b) (\*) *Napadne vás vzoreček pro počet ekvivalencí na  $n$ -prvkové množině?*

**Příklad 4.** *Popište všechny relace na množině  $X$ , které jsou zároveň ekvivalencí a zároveň částečným uspořádáním.*

**Příklad 5.** *Dokažte, že relace  $R$  na množině  $X$  je tranzitivní právě tehdy, když  $R \circ R \subseteq R$ .*

## 2 Funkce

*Zobrazení* (respektive *funkce*)  $f: X \rightarrow Y$  je relace  $f \subseteq X \times Y$  taková, že pro každé  $x \in X$  existuje právě jedno  $y \in Y$ , které je v relaci  $f$  s  $x$ . Funkce  $f: X \rightarrow Y$  je

- (a) *prostá* (neboli *injektivní*), pokud  $f(x) \neq f(x')$  pro každé  $x \neq x'$ ,  $x, x' \in X$ ;
- (b) *na* (neboli *surjektivní*), pokud pro každé  $y \in Y$  existuje  $x \in X$  takové, že  $f(x) = y$ ;
- (c) *vzájemně jednoznačná* (neboli *bijektivní*), pokud je prostá a na.

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Jsou-li  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow Z$  funkce, pak jejich *složení* označujeme jako  $g \circ f$  a jedná se o funkci  $h: X \rightarrow Z$  danou předpisem  $x \mapsto g(f(x))$ . Všimněte si, že skládání je značené jinak než u relací!

**Příklad 6.** Najděte příklad

(a) prosté funkce  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , která není na,

(b) funkce  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , která je na, ale není prostá.

**Příklad 7.** Necht'  $f: X \rightarrow Y$  a  $g: Y \rightarrow Z$  jsou zobrazení. Necht'  $g \circ f$  je prosté.

(a) Rozhodněte, zda  $f$  musí být prosté.

(b) Rozhodněte, zda  $g$  musí být prosté.

**Příklad 8.** Jaký je počet všech zobrazení  $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ? Co počet bijektivních zobrazení  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  a prostých zobrazení  $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ?