Diskrétní matematika — 14. cvičení

10. ledna 2019

1 Rovinné grafy a barevnost

Rovinný graf G je graf, který má alespoň jedno rovinné nakreslení, ve kterém mají spojité křivky odpovídající různým hranám společné nanejvýš koncové body. Po odstranění těchto křivek se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěny nakreslení grafu* G. Řekneme, že graf H je *podrozdělením* grafu G, pokud H je izomorfní grafu, který z G dostaneme podrozdělováním jeho hran, tj. umísťováním vrcholů na hrany.

Eulerova formule. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$ a jako f počet stěn nakreslení grafu G. Potom platí $v + f - e = 2$.*

Věta o čtyřech barvách. *Každý rovinný graf jde obarvit čtyřmi barvami.*

Kuratowského věta. *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$.*

Také z přednášky víme, že každý rovinný graf na n vrcholech má nanejvýš $3n-6$ hran a pokud navíc neobsahuje trojúhelník, tak má nanejvýš $2n-4$ hran.

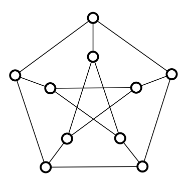
Příklad 1. *Nalezněte příklad triangulace, na které se rozbije následující nesprávný důkaz Věty o čtyřech barvách:*

Důkaz. Stačí uvažovat jen maximální rovinné grafy, čili triangulace, protože přidáním hrany neklesne barevnost. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n. Pro $n = 3$ je tvrzení triviální, protože $\chi(K_3) = 3$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny triangulace na n vrcholech. Přidáním vrcholu v do stěny F n-vrcholové triangulace T' a spojením v hranami se všemi vrcholy stěny F obdržíme triangulaci T na $n+1$ vrcholech. Uvažme obarvení T' nanejvýš čtyřmi barvami, které máme z indukčního předpokladu. Protože v sousedí se třemi vrcholy, můžeme v obarvit za použití nanejvýš čtyř barev. Tím obdržíme obarvení s nanejvýš čtyřmi barvami pro T a tvrzení tak platí i pro triangulace s $n+1$ vrcholy. □

Příklad 2. *Buď G rovinný graf neobsahující K_3. Dokažte $\chi(G) \leq 4$.*

Příklad 3. *Nalezněte rovinná nakreslení grafů K_5, K_6 a K_7 na toru.*

Příklad 4. *Ukažte, že Petersenův graf není rovinný.*



Příklad 5. *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.*

Příklad 6. *Nechť G je rovinný graf na alespoň třech vrcholech. Ukažte, že potom $V(G)$ může být rozděleno na tři množiny S_1, S_2 a S_3 tak, že každé S_i indukuje les.*