Diskrétní matematika — 13. cvičení

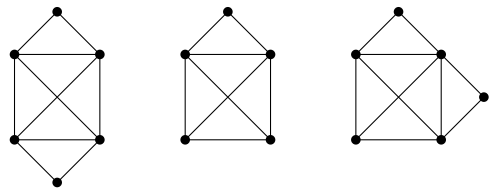
3. ledna 2019

1 Eulerovské grafy

Tah v grafu G je posloupnost $(v_0, e_1, \ldots, e_n, v_n)$, kde v_i jsou vrcholy a $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ hrany G, přičemž každá hrana grafu G je v posloupnosti nanejvýš jednou. Tah v G je *uzavřený*, pokud $v_n = v_0$. Tah v G je *Eulerovský*, jestliže obsahuje všechny hrany G.

Věta 1. *Graf G bez izolovaných vrcholů obsahuje uzavřený Eulerovský tah právě tehdy, když G má všechny stupně sudé a je souvislý.*

Příklad 1. *Nakreslete následující grafy jedním tahem:*



Příklad 2. *Charakterizujte grafy s Eulerovským tahem, který nemusí být nutně uzavřený.*

Orientovaný graf $G = (V, E)$ je dvojice, kde V je konečná množina vrcholů a E je množina uspořádaných dvojic vrcholů. *Výstupní stupeň* vrcholu v je počet incidentních hran orientovaných z v a *vstupní stupeň* v je počet incidentních hran orientovaných do v. *Orientovaný tah* v G je tah respektující orientaci hran. Orientovaný graf G je *slabě souvislý*, pokud je souvislý jeho podkladový neorientovaný graf.

Věta 2. *Orientovaný graf G bez izolovaných vrcholů obsahuje uzavřený Eulerovský tah právě tehdy, když G je slabě souvislý a každý jeho vrchol má vstupní stupeň rovný výstupnímu stupni.*

Příklad 3 (*). *Řekneme, že cyklická posloupnost symbolů z abecedy velikosti k je* De Bruijnova*, pokud obsahuje každé z k^n slov délky n nad danou abecedou právě jednou jako souvislý úsek. Například cyklická posloupnost* 00011101 *je De Bruijnova pro $n = 3$ a $k = 2$. Dokažte, že De Bruijnovy posloupnosti existují pro každé k a n.*

2 Grafová barevnost

Zobrazení $b\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ nazveme *obarvením grafu* $G = (V, E)$, pokud pro každou hranu $\{u, v\} \in E$ platí $b(u) \neq b(v)$. *Barevnost grafu* G, označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev nutný k obarvení G.

Příklad 4. *Zkuste najít graf G, jehož barevnost je větší než velikost největšího úplného grafu, který G obsahuje jako podgraf. Pro zajímavost: jak velkou barevnost dokážete vynutit v grafu, který neobsahuje K_3?*

Příklad 5. *Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0,1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Čemu se rovná $\chi(Q_n)$?*

Příklad 6. *Máme-li pořadí vrcholů $v_1, \ldots, v_n$ grafu G a množinu barev $\{1, 2, \ldots, k\}$, tak hladový algoritmus obarvení bere vrcholy v tomto pořadí a každému přiřadí minimální povolenou barvu.*

(a) Ukažte, že vždy existuje takové pořadí vrcholů, na kterém hladový algoritmus barvení použije $\chi(G)$ barev.

(b) Ukažte, že existuje strom T a pořadí jeho vrcholů takové, že na něm hladový algoritmus obarvení spotřebuje $\Omega(\log n)$ barev.