Diskrétní matematika — 10. cvičení

6. prosince 2018

1 Úvod do teorie grafů

(Neorientovaný) graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran. Důležitými grafy jsou například

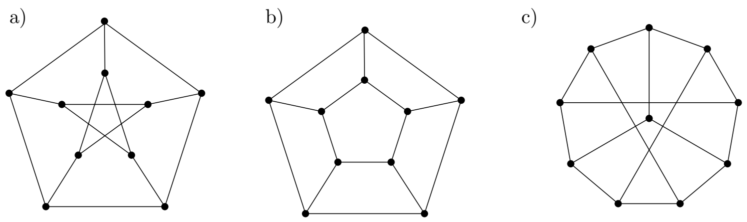
- *úplný graf* na n vrcholech $K_n = (V, \binom{V}{2})$, $|V| = n$,
- *cyklus* $C_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\} \colon i = 1, \dots, n-1\} \cup \{\{1, n\}\})$,
- *cesta* $P_n = (\{1, \dots, n\}, \{\{i, i+1\} \colon i = 1, \dots, n-1\})$,
- *úplný bipartitní graf* $K_{m,n}$, kde $m, n \geq 1$, $V = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_m\}$ a $E = \{\{u_i, v_j\} \colon i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m\}$.

Graf H je *podgrafem* grafu G, pokud $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G)$. *Stupeň vrcholu* v je počet hran grafu G obsahujících vrchol v, značíme jej $\deg_G(v)$. Graf G je *souvislý*, pokud v něm pro každé jeho dva vrcholy u, v existuje cesta z u do v. Řekneme, že grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ jsou *izomorfní*, pokud existuje bijekce $f \colon V \to V'$ taková, že platí $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\} \in E'$. Jako *doplněk grafu* G značíme graf $\overline{G}$, který má hrany právě mezi těmi vrcholy, mezi kterými je G nemá.

Příklad 1. *Existuje graf s alespoň dvěma vrcholy, jehož vrcholy by měly všechny stupně různé?*

Příklad 2. *Dokažte, že doplněk každého nesouvislého grafu je souvislý. Musí to platit obráceně? Tedy musí být každý graf se souvislým doplňkem nesouvislý?*

Příklad 3. *Které z následujících grafů jsou izomorfní?*



Příklad 4. *Nechť máme $m, n, k \in \mathbb{N}$.*

(a) Spočítejte počet cyklů délky k v grafu K_n.

(b) Spočítejte počet cyklů délky k v grafu $K_{m,n}$.

Příklad 5. *Ukažte, že každý graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň alespoň d, obsahuje cestu na $d + 1$ vrcholech jako podgraf.*

Příklad 6. *Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.*