Diskrétní matematika – příklady na 1. cvičení[*]

4. října 2018

1 Výroky

Příklad 1. *Nechť M je množina osob přítomných v posluchárně a nechť $W(x,y)$ znamená: osoba x zná příjmení osoby y. Zkoumejte platnost výroků*

$$\begin{gathered}\forall x \in M\ \exists y \in M : W(x,y)\,;\\ \forall y \in M\ \exists x \in M : W(x,y)\,;\\ \exists x \in M\ \forall y \in M : W(x,y)\,;\\ \exists y \in M\ \forall x \in M : W(x,y)\,.\end{gathered}$$

Příklad 2. *Platí výrok*

$$\neg\left(\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall z \in \mathbb{R} : (z > y \Rightarrow z > x)\right) \;\Leftrightarrow\; \left(\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists z \in \mathbb{R} : (z > y \;\&\; z \leq x)\right)?$$

2 Matematická indukce

Příklad 3. *Dokažte matematickou indukcí platnost následujících vztahů pro každé $n \in \mathbb{N}$*

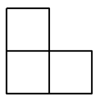
(a) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(b) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$.

Příklad 4. *Uvažme Fibonacciho posloupnost $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, což je posloupnost splňující rekurentní podmínky $F_1 = F_2 = 1$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$. Ukažte, že platí*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Příklad 5. *Mějme šachovnici o rozměrech $2^n \times 2^n$ pro $n \in \mathbb{N}$, na které chybí jedno rohové políčko. Ukažte, že je možné ji celou vydláždit dlaždicemi následujícího tvaru:*



Příklad 6. *Mějme n přímek v obecné poloze v rovině (tj. žádné tři se neprotínají v jednom bodě a žádné dvě nejsou rovnoběžné). Ukažte, že rovina je těmito přímkami rozdělena na $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ částí.*

Příklad 7. *Najděte chybu ve zmíněném důkazu tvrzení: Nechť $p_1, \ldots, p_n$ je $n \geq 2$ různých přímek v rovině, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné. Potom všechny tyto přímky mají společný bod.*

Důkaz. Postupujeme indukcí. Pro $n = 2$ tvrzení platí. Nechť platí pro n a mějme $n+1$ přímek $p_1, \ldots, p_{n+1}$. Z indukčního předpokladu mají přímky $p_1, p_2, \ldots, p_n$ společný bod x. Podobně přímky $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_{n+1}$ mají společný bod y. Přímka p_1 leží v obou skupinách, proto obsahuje jak x, tak y. Totéž platí pro p_{n-1}. Poněvadž p_1 a p_{n-1} jsou různoběžné a protínají se tedy jen v jednom bodě, platí $x = y$. Takže všechny přímky $p_1, \ldots, p_{n+1}$ mají společný bod. □

Příklad 8 (*). *Na ostrově žije 1000 domorodců, z nichž 900 má hnědé a 100 modré oči. Každý domorodec vidí barvu očí všech ostatních, ale nezná tu svoji. Jejich náboženství jim zakazuje se o barvě očí bavit a dozví-li se nějaký domorodec, že má modré oči, pak se musí následující den zabít. Jednoho dne kmen navštívil cestovatel neznalý místních zvyklostí, který při svém odjezdu neopatrně prohlásil: „To jsem rád, že vidím osobu s modrýma očima.“. Jaký vliv bude mít tato poznámka na domorodce?*

[*]Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/

(a) *Nestane se nic, protože cestovatel nepřinesl žádnou novou informaci. Každý člověk z kmene již před jeho návštěvou věděl, že někteří z místních mají modré oči.*

(b) *Po 100 dnech všichni modroocí domorodci spáchají sebevraždu. To proto, že daná situace je speciální případ následující věty, která se dá dokázat matematickou indukcí.*

Věta. *Nechť v kmeni žije $n \in \mathbb{N}$ domorodců s modrýma očima. Potom po n dnech od cestovatelova odjezdu všech n domorodců s modrýma očima spáchá sebevraždu.*

Důkaz. Postupujeme indukcí podle n. Pro $n = 1$ si osamocený modrooký domorodec uvědomí, že cestovatel mluvil o něm a zabije se další den. Nyní uvažme $n > 1$. Každý modrooký domorodec bude uvažovat následovně: „Pokud nemám modré oči, pak je na ostrově jen $n - 1$ osob s modrýma očima a ti podle indukce spáchají sebevraždu po $n-1$ dnech od cestovatelova odjezdu.“ Ale po $n - 1$ dnech nikdo sebevraždu nespáchá, protože nikdo z nich do té doby nemá jak zjistit, že je sám modrooký. Pod $n - 1$ dnech si tak každý z modrookých domorodců uvědomí, že sám musí mít modré oči a n-tý den spáchá sebevraždu. □

Příklad 9 (*)**.** *Indukcí dokažte nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Neboli, že pro každých n kladných reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right).$$