Diskrétní matematika
Zadání domácích úkolů

21. prosince 2018

1 Zadáno 4. 10. 2018 (Termín odevzdání 18. 10. 2018)

Příklad 1. *Chceme rozlámat tabulku čokolády s $m \times n$ dílky na jednotlivé dílky. Kolik nejméně rozlomení je na to potřeba? A kolik nejvíce?* **[3]**

Příklad 2. *Jaký je počet slov délky n nad abecedou $\{A, B\}$, ve kterých se nevyskytují dvě po sobě jdoucí písmena B?* **[2]**

Příklad 3. *Alice si přinesla tři svoje vlastní šestistěnné kostky (červenou, žlutou a modrou) a chce si s vámi zahrát hru, ve které budete každý házet svou na začátku vybranou kostkou, přičemž v každém kole vyhraje ten, komu padne vyšší číslo. Navíc si můžete jako první vybrat kostku, se kterou pak budete celou dobu házet. Kostky jsou spravedlivé, na červené jsou dvě trojky, dvě čtyřky a dvě osmičky, na žluté jsou dvě jedničky, dvě pětky a dvě devítky a na modré jsou dvě dvojky, dvě šestky a dvě sedmičky. Jakou kostku byste si zvolili?* **[3]**

Příklad 4. *Dokažte indukcí, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $(n^5 - n)$ dělitelné pěti.* **[2]**

2 Zadáno 18. 10. 2018 (Termín odevzdání 1. 11. 2018)

Příklad 5. *Dokažte, že relace R na množině X je tranzitivní právě tehdy, když $R \circ R \subseteq R$.* **[2]**

Příklad 6. *Najděte příklad dvojice relací (R, S) na X takové, že R i S jsou tranzitivní, ale $R \cup S$, $R \setminus S$ ani $R \Delta S$ tranzitivní nejsou. Operace symetrický rozdíl $R \Delta S$ vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin R a S, formálně $R \Delta S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$.* **[3]**

Příklad 7. *Dokažte, že platí $R \circ R^{-1} = \Delta_X$, je-li relace $R \circ R^{-1}$ reflexivní a slabě antisymetrická. Symbolem Δ_X značíme nejmenší reflexivní relaci na množině X:* **[3]**

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Příklad 8. *Dokažte, že uspořádaná množina $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ má nekonečně mnoho minimálních prvků. O která čísla se jedná? Nakreslete příslušný Hasseův diagram na prvcích $1, 2, \ldots, 15$.* **[2]**

Příklad 9. *Nakreslete Hasseův diagram částečně uspořádané množiny $(\{2^k 3^l : k, l \in \mathbb{N}\}, |)$ (množina čísel dělitelných pouze 2 a 3 uspořádaná relací dělitelnosti).* **[2]**

Příklad 10. *Kolik nul má na konci číslo $100!$? Jak je tomu v pětkové soustavě? Co v binární? (Svá tvrzení dokažte bez použití počítače.)* **[4]**

3 Zadáno 1. 11. 2018 (Termín odevzdání 15. 11. 2018)

Příklad 11. *Nechť $\check{s}(n)$ značí počet permutací bez pevného bodu na n-prvkové množině. Dokažte vztah* **[2]**

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

Příklad 12. *Nechť k, n jsou přirozená čísla. Dokažte, že $(k!)^n$ dělí $(kn)!$.* **[3]**
Hint: zkuste uvážit kombinatorickou interpretaci.

Příklad 13. *Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Maďary a 3 Rusy tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili jeden souvislý blok? Členy stejné národnosti mezi sebou rozlišujeme.* **[3]**

4 Zadáno 15. 11. 2018 (Termín odevzdání 29. 11. 2018)

Příklad 14. *Mějme množinu S velikosti n. Ukažte, že počet jejích podmnožin, které mají lichou velikost, se rovná počtu jejích podmnožin sudé velikosti. Jakému číslu se daný počet rovná?* **[2]**

Příklad 15. *Pro všechna celá čísla $n \geq r \geq 1$ dokažte, že platí* **[3]**

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}.$$

(Pozor! Při postupu matematickou indukcí podle n při pevném r nestačí jako začátek indukce zvolit $n = r = 1$.)

Příklad 16. *Mějme čísla r, m, $n \in \mathbb{N}$ taková, že platí $r \leq m \leq n$. Dokažte, že platí* **[2]**

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}.$$

Příklad 17. *Dokažte, že pro každých n jevů $A_1, \ldots, A_n$ v konečném pravděpodobnostním prostoru platí* **[3]**

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Příklad 18. *Dokažte, že v konečném pravděpodobnostním prostoru (Ω, P), ve kterém je $|\Omega|$ prvočíslo a ve kterém mají všechny elementární jevy stejnou pravděpodobnost, neexistují dva netriviální nezávislé jevy. Za* triviální jevy *označujeme jevy $\emptyset$ a Ω.* **[3]**

Příklad 19. *Nechť π je permutace množiny $\{1, \ldots, n\}$ vybraná uniformně náhodně z množiny S_n všech takových permutací. Označme jako $X(\pi)$ počet pevných bodů π, tedy počet $i \in \{1, \ldots, n\}$ s $\pi(i) = i$. Určete $\mathbb{E}[X]$.* **[3]**

Příklad 20. *Dokažte, že v konečném pravděpodobnostním prostoru (Ω, P) platí $\mathbb{E}[X^2] \geq \mathbb{E}[X]^2$ pro každou náhodnou veličinu X na Ω. Jako $\mathbb{E}[X^2]$ značíme výraz $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)^2 P(\{\omega\})$.* **[3]**

Hint: Dokažte $0 \leq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

5 Zadáno 29. 11. 2018 (Termín odevzdání 13. 12. 2018)

Příklad 21. *Určete distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl Poissonova rozdělení, což je rozdělení náhodné veličiny X, která nabývá hodnot $k = 0, 1, \ldots$ s pravděpodobnostmi $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, kde $\lambda > 0$.* **[4]**

Hint: Při počítání se může hodit vědět, že $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X]$ a $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Příklad 22. *Mějme posloupnost $X_1, X_2, \ldots$ nezáporných náhodných veličin takových, že $\mathbb{E}[X_n]$, $\mathrm{Var}[X_n] > 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{Var}[X_n]}{\mathbb{E}[X_n]^2} = 0.$$

Dokžte, že **[3]**

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n > 0) = 1.$$

Hint: Čebyševova nerovnost.

Příklad 23. *Jako* kovarianci *dvou náhodných veličin X a Y označme*

$$\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

(rozmyslete si, že uvedený vztah skutečně platí). Dokažte, že pro náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ platí **[3]**

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} \mathrm{Cov}[X_i, X_j].$$

6 Zadáno 21. 12. 2018 (Termín odevzdání 10. 1. 2019)

Příklad 24. *Nechť máme $m, n, k \in \mathbb{N}$. Spočítejte počet cyklů délky k v grafu $K_{m,n}$.* **[3]**

Příklad 25. *Nalezněte chybu v následujícím důkazu tvrzení „Každý graf s alespoň třemi vrcholy a se všemi stupni velikosti alespoň dva obsahuje cyklus C_3.“* **[3]**

Důkaz. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n. Tvrzení platí v případě $n = 3$, protože daný graf může být jen C_3. Uvažme indukční krok, nechť G je graf na $n-1$ vrcholech se všemi stupni velikosti alespoň dva. Pro G tvrzení platí z indukčního předpokladu a tedy obsahuje C_3. Vytvoříme z G nový graf G' na n vrcholech přidáním nového vrcholu, který je incidentní s alespoň dvěma vrcholy z G. Protože G obsahoval cyklus C_3, tak jej G' obsahuje také. □

Příklad 26. *Pro každou dvojici přirozených čísel n, k, která splňuje podmínky $n \geq k+1$ a $2 \mid kn$, sestrojte k-regulární graf na n vrcholech.* **[3]**

Příklad 27. *Ukažte, že každý graf G obsahuje vrchol u a množinu aspoň $\lfloor \frac{1}{2} \deg_G(u) \rfloor$ cyklů takových, že každé dva sdílejí pouze vrchol u a žádný jiný.* **[2]**

Příklad 28. *Ukažte, že každá kostra souvislého grafu G obsahuje všechny mosty. Mostem v G rozumíme hranu, po jejímž odebrání G přestane být souvislý.* **[2]**

Příklad 29. *Nechť T je strom s aspoň dvěma vrcholy takový, že pro každou jeho hranu e mají obě komponenty v $T - e$ lichý počet vrcholů. Dokažte, že potom má každý vrchol v T lichý stupeň.* **[3]**

Příklad 30. *Nechť T je strom s $n \geq 2$ vrcholy. Nechť p_i, $i \in \mathbb{N}$, označuje počet vrcholů v T stupně i. Ukažte, že platí* **[2]**

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \cdots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

Příklad 31. *Nechť $T_1, T_2, \ldots, T_k$ jsou podstromy stromu T takové, že každé dva mají neprázdný společný průnik. Ukažte, že potom existuje vrchol společný všem podstromům T_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.* **[3]**

Příklad 32. *Ukažte, že doplněk rovinného grafu na alespoň jedenácti vrcholech není rovinný. Na kolika vrcholech ještě dokážete najít rovinné nakreslení grafu a jeho doplňku?* **[3]**

Příklad 33. *Dokažte, že každý rovinný graf, jehož vrcholy mají všechny stupně alespoň 5, má alespoň 12 vrcholů.* **[2]**