Diskrétní matematika — 7. cvičení

18. listopadu 2015

1 Princip inkluze a exkluze

Věta 1 (Princip inkluze a exkluze)**.** *Pro každý soubor konečných množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ platí*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|.$$

Příklad 1. *Ve třídě je 30 žáků, z nichž 12 má rádo matematiku, 14 fyziku a 13 chemii. Také víme, že 5 má rádo matematiku i fyziku, 7 fyziku i chemii a 4 žáci mají rádi matematiku i chemii. Tři žáci mají rádi všechny tři předměty. Kolik žáků nemá rádo ani jeden předmět?*

Příklad 2. *Kolik čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ je dělitelných 7, 10 nebo 15?*

Příklad 3. *Nechť m, n jsou přirozená čísla taková, že platí $m \geq n$. Jaký je počet surjektivních zobrazení typu $f\colon \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$?*

Příklad 4. *Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Maďary a 3 Rusy tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili jeden souvislý blok? Členy stejné národnosti mezi sebou rozlišujeme.*

Příklad 5. *Kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, U, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov BAR, DEN, RAZIE?*

Příklad 6 (*)**.** *Buď*

$$\varphi(n) = |\{m \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \gcd(n, m) = 1\}|$$

Eulerova funkce. Pomocí principu inkluze a exkluze ukažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

kde $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ pro přirozená čísla $r, e_1, \ldots, e_r$ a prvočísla $p_1, \ldots, p_r$ je prvočíselný rozklad n.