Diskrétní matematika — 6. cvičení

11. listopadu 2015

1 Kombinatorické počítání a Dirichletův princip

Dirichletův princip. *Máme přirozená čísla $n_1, \dots, n_k$ a rozdělení $X_1, \dots, X_k$ množiny X, která má velikost alespoň $1 + \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)$. Potom existuje i takové, že platí $|X_i| \geq n_i$.*

Příklad 1. *Mějme čísla r, m, $n \in \mathbb{N}$ taková, že platí $r \leq m \leq n$. Dokažte, že platí*

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}.$$

Příklad 2. *Dokažte následující identitu:*

$$\sum_{i=d}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{d} = 2^{n-d}\binom{n}{n-d}.$$

Příklad 3 (*). *Kolik existuje k-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, v nichž se nevyskytují žádná dvě po sobě jdoucí čísla?*

Příklad 4. *Ve studijním plánu si každý student může vybrat z celkem 7 předmětů. K úspěšnému dokončení semestru musí každý student splnit aspoň tři předměty. Ukažte, že dokončilo-li úspěšně semestr 200 studentů, pak aspoň šest z nich splnilo stejnou trojici předmětů.*

Příklad 5. *Dokažte, že postavíme-li v posluchárně 12 židlí vedle sebe do řady a posadíme-li na ně 9 lidí (každý člověk sedí na právě jedné židli), tak vždy najdeme trojici po sobě jdoucích obsazených židlí.*

2 Asymptotická složitost

Mějme nezáporné funkce $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Potom značení $f(n) = O(g(n))$ znamená, že existují konstanty $C > 0$ a n_0 takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $f(n) \leq C \cdot g(n)$. Neboli funkce f roste asymptoticky nanejvýš tak rychle jako g. Podobně využíváme i následující značení:

Značení	Definice	Význam
$f(n) = \Omega(g(n))$	$\exists C > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 \colon f(n) \geq C \cdot g(n)$	f roste aspoň tak rychle jako g
$f(n) = \Theta(g(n))$	$\exists C_1 > 0\ \exists C_2 > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 \colon$ $C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n)$	f a g rostou asymptoticky stejně
$f(n) = o(g(n))$	$\forall C > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 \colon f(n) \leq C \cdot g(n)$	f roste mnohem pomaleji než g
$f(n) \sim g(n)$	$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$	f a g jsou asymptoticky rovné

Příklad 6. *Seřaďte následující výrazy podle velikosti pro velké n (tedy například pro $n > 10^{10^{10}}$):*

$$2^{2n},\ e^{\ln^3 n},\ \binom{2n}{n},\ n^{\ln n},\ \left(\sqrt{n}\right)^n.$$

Příklad 7. *Rozhodněte, zda jsou následující výrazy pravdivé.*

(a) $n! = 2^{O(n)}$,

(b) $n^2 + 5n \ln n = n^2(1 + o(1)) \sim n^2$,

(c) $n^{\ln n} = 2^{\Omega(n)}$,

(d) $\sum_{i=1}^{n} i^8 = \Theta(n^9)$.

Příklad 8. *Nalezněte kladné a neklesající funkce $f(n)$ a $g(n)$ definované pro všechna přirozená čísla tak, aby neplatilo $f(n) = O(g(n))$ a ani $g(n) = O(f(n))$.*