

Diskrétní matematika – příklady na 1. cvičení*

7. října 2015

1 Relace

(Binární) relace R je množina uspořádaných párů. Neboli $R \subseteq X \times Y$, kde X a Y jsou nějaké množiny. Je-li $X = Y$, tak mluvíme o *relaci na X* . Fakt, že prvky $x \in X$ a $y \in Y$ jsou v relaci R , zapisujeme $(x, y) \in R$ nebo xRy . Jsou-li X, Y, Z množiny a $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ jsou relace, pak *složení relací* $R \circ S$ značí relaci $T \subseteq X \times Z$, kde pro $x \in X$ a $z \in Z$ platí xTz právě tehdy, když existuje $y \in Y$ takové, že xRy a ySz . *Inverzní relací* R^{-1} k relaci $R \subseteq X \times Y$ rozumíme $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$. Relace $R \subseteq X \times X$ je

- (a) *reflexivní*, pokud xRx pro každé $x \in X$;
- (b) *symetrická*, pokud xRy implikuje yRx pro každé $x, y \in X$;
- (c) (*slabě*) *antisymetrická*, pokud xRy a yRx implikuje $x = y$ pro každé $x, y \in X$;
- (d) *tranzitivní*, pokud xRy a yRz implikuje xRz pro každé $x, y, z \in X$;
- (e) *asymetrická*, pokud xRy implikuje $\neg(yRx)$ pro každé $x, y, z \in X$.

Jako *ekvivalenci* označujeme relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Příklad 1. *Kolik je na n -prvkové množině X relací? Kolik z nich je reflexivních? Kolik symetrických? Kolik relací je zároveň reflexivních a zároveň symetrických?*

Příklad 2. *Nechť R a S jsou ekvivalence na množině X . Rozhodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalence:*

- (a) $R \cap S$
- (b) $R \cup S$
- (c) $R \setminus S$
- (d) $R \circ S$

Příklad 3. (a) *Kolik existuje ekvivalencí na čtyřprvkové množině?*

(b) (*) *Napadne vás vzoreček pro počet ekvivalencí na n -prvkové množině?*

Příklad 4. *Popište všechny relace na množině X , které jsou zároveň ekvivalencí a zároveň částečným uspořádáním.*

Příklad 5. *Dokažte, že relace R na množině X je tranzitivní právě tehdy, když $R \circ R \subseteq R$.*

2 Funkce

Zobrazení (respektive *funkce*) $f: X \rightarrow Y$ je relace $f \subseteq X \times Y$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje právě jedno $y \in Y$, které je v relaci f s x . Funkce $f: X \rightarrow Y$ je

- (a) *prostá* (neboli *injektivní*), pokud $f(x) \neq f(x')$ pro každé $x \neq x'$, $x, x' \in X$;
- (b) *na* (neboli *surjektivní*), pokud pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$;
- (c) *vzájemně jednoznačná* (neboli *bijektivní*), pokud je prostá a na.

Jsou-li $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ funkce, pak jejich *složení* označujeme jako $g \circ f$ a jedná se o funkci $h: X \rightarrow Z$ danou předpisem $x \mapsto g(f(x))$. Všimněte si, že skládání je značené jinak než u relací!

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>

Příklad 6. Najděte příklad

(a) prosté funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která není na,

(b) funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, která je na, ale není prostá.

Příklad 7. Necht' $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ jsou zobrazení. Necht' $g \circ f$ je prosté.

(a) Rozhodněte, zda f musí být prosté.

(b) Rozhodněte, zda g musí být prosté.

Příklad 8. Jaký je počet všech zobrazení $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$? Co počet bijektivních zobrazení $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ a prostých zobrazení $f: \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$?