

Diskrétní matematika — příklady na 14. cvičení*

13. ledna 2016

1 Rovinné grafy

Rovinný graf G je graf, který má alespoň jedno rovinné nakreslení, ve kterém mají spojitě křivky odpovídající různým hranám společné nanejvýš koncové body. Po odstranění těchto křivek se rovina rozpadne na konečný počet souvislých oblastí, které nazýváme *stěny nakreslení grafu* G . Řekneme, že graf H je *podrozdělením* grafu G , pokud H je izomorfní grafu, který z G dostaneme podrozdělováním jeho hran, tj. umístováním vrcholů na hrany.

Eulerova formule. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme $v = |V|$, $e = |E|$ a jako f počet stěn nakreslení grafu G . Potom platí $v + f - e = 2$.*

Věta o čtyřech barvách. *Každý rovinný graf jde obarvit čtyřmi barvami.*

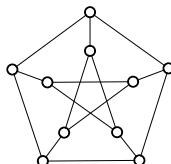
Kuratowského věta. *Graf je rovinný právě tehdy, když neobsahuje podrozdělení K_5 ani $K_{3,3}$.*

Příklad 1. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf. Označme jako f počet stěn jeho nakreslení.*

- (a) *Ukažte, že pro každý rovinný graf s $|V| \geq 3$ platí $|E| \leq 3|V| - 6$. Můžete bez důkazu využít fakt, že maximální rovinné grafy co do počtu hran jsou triangulace, což jsou rovinné grafy, pro které existuje rovinné nakreslení, v němž je každá stěna trojúhelník.*
- (b) *Pro jaké největší $d \in \mathbb{N}$ dokážete najít d -regulární rovinný graf? Jak velké d má ještě smysl uvažovat?*

Příklad 2. *Nalezněte rovinná nakreslení grafů K_5 , K_6 a K_7 na toru.*

Příklad 3. *Ukažte, že Petersenův graf není rovinný.*



Příklad 4. *Ukažte, že doplněk rovinného grafu na alespoň jedenácti vrcholech není rovinný. Na kolika vrcholech ještě dokážete najít rovinné nakreslení grafu a jeho doplňku?*

Příklad 5. *Vnějškově rovinný graf je graf, který má takové rovinné nakreslení, v němž jsou všechny vrcholy na vnější stěně. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf je 3-obarvitelný.*

Příklad 6. *Nechť G je rovinný graf na alespoň třech vrcholech. Ukažte, že potom $V(G)$ může být rozděleno na tři množiny S_1 , S_2 a S_3 tak, že každé S_i indukuje les.*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>