Diskrétní matematika — příklady na 11. cvičení*

15. prosince 2015

1 Grafová barevnost

Zobrazení $b\colon V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ nazveme *obarvením grafu G=(V,E)*, pokud pro každou hranu $\{u, v\} \in E$ platí $b(u) \neq b(v)$. *Barevnost grafu G*, označovaná $\chi(G)$, je minimální počet barev nutný k obarvení G. Velikost největší *nezávislé množiny* grafu G, neboli množiny, ve které žádné dva vrcholy nejsou spojené hranou, značíme $\alpha(G)$.

Jako *chromatický polynom* grafu G označujeme polynom P_G, kde $P_G(k)$ označuje počet obarvení grafu G při použití k barev. Obarvení zde bereme jako různá i když se liší jen pořadím barev. Příklady: pro prázdný graf E_n na n vrcholech máme $P_{E_n}(k) = k^n$, pro úplný graf K_n dostaneme $P_{K_n}(k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$.

Příklad 1. *Zkuste najít graf G jehož barevnost je větší než velikost největšího úplného grafu, který G obsahuje jako podgraf. Pro zajímavost: jak velkou barevnost dokážete vynutit v grafu, který neobsahuje K_3?*

Příklad 2. *Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0,1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Čemu se rovná $\chi(Q_n)$?*

Příklad 3. *Pro každý graf s n vrcholy a m hranami zkuste ukázat následující odhady barevnosti:*

(a) $\chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1$.

(b) $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$.

Příklad 4. *Máme-li pořadí vrcholů $v_1, \ldots, v_n$ grafu G a množinu barev $\{1, 2, \ldots, k\}$, tak hladový algoritmus obarvení bere vrcholy v tomto pořadí a každému přiřadí minimální povolenou barvu.*

(a) Ukažte, že vždy existuje takové pořadí vrcholů, na kterém hladový algoritmus barvení použije $\chi(G)$ barev.

(b) Ukažte, že existuje strom T a pořadí jeho vrcholů takové, že na něm hladový algoritmus obarvení spotřebuje $\Omega(\log n)$ barev.

Příklad 5. *Určete chromatický polynom cesty P_n.*

Příklad 6. *Dokažte, že všechny stromy na n vrcholech mají stejný chromatický polynom.*

Příklad 7. *Pro graf G a jeho hranu e označme jako $G-e$ graf, který z G vznikne odebráním e a jako $G \cdot e$ označme graf, který vznikne z G* kontrakcí *hrany e, neboli slepením jejích koncových vrcholů a odstraněním případných smyček a násobných hran. Dokažte, že platí $P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G\cdot e}(k)$.*

---

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/