

# Diskrétní matematika — příklady na 10. cvičení\*

9. prosince 2015

## 1 Stromy

*Strom* je souvislý graf bez cyklů. Ekvivalentní definice jsou:

- (i) graf, kde každé dva vrcholy lze spojit jednoznačně určenou cestou,
- (ii) souvislý graf, který přestane být souvislý po odebrání libovolné hrany,
- (iii) graf bez cyklů, kde po přidání libovolné nové hrany už cyklus vznikne,
- (iv) souvislý graf s počtem hran o jedna menším než je počet vrcholů.

Nesouvislý graf, jehož každá komponenta souvislosti je stromem, se nazývá *les*. *Kostrou* souvislého grafu  $G$  označujeme podgraf grafu  $G$ , který obsahuje všechny vrcholy  $G$  a který je zároveň stromem.

**Příklad 1.** *Kolik je všech stromů s vrcholy  $\{1, 2, 3, 4\}$ ? Nakreslete všechny neizomorfní stromy na 6 vrcholech.*

**Příklad 2.** *Ukažte, že graf na  $n$  vrcholech s  $k$  komponentami souvislosti je lesem právě tehdy, když má  $n - k$  hran.*

**Příklad 3.** *Dokažte, že každý souvislý graf  $G$  má kostru.*

**Příklad 4.** *Dokažte, že graf  $G = (V, E)$  je stromem právě tehdy, když neobsahuje kružnici a  $|E| = |V| - 1$ .*

**Příklad 5.** *Strom na 4152 vrcholech má pouze vrcholy stupně 1 a 3. Kolik minimálně a maximálně může mít listů?*

**Příklad 6.** *Nechť  $T$  je strom s aspoň dvěma vrcholy takový, že pro každou jeho hranu  $e$  mají obě komponenty v  $T - e$  lichý počet vrcholů. Dokažte, že potom má každý vrchol v  $T$  lichý stupeň.*

**Příklad 7.** *Spočtěte počet koster úplného bipartitního grafu  $K_{2,n}$ . Kostrou grafu  $G$  rozumíme strom, který obsahuje všechny vrcholy grafu  $G$  a je jeho podgrafem.*

**Příklad 8.** *Dokažte, že pro každé přirozené  $n$  existuje nanejvýš  $4^n$  neizomorfních stromů.*

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>