Diskrétní matematika
Zadání domácích úkolů

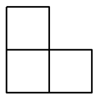
9. ledna 2016

1 Zadáno 7. 10. 2015

Příklad 1. *Dokažte, že pokud do čtverce se stranami délky 1 umístíme pět bodů, tak vždy mezi nimi dokážeme najít dva, které jsou v (Eukleidovské) vzdálenosti nanejvýš* $\sqrt{2}/2$*. Je možné nahradit* $\sqrt{2}/2$ *menším číslem?* **[2]**

Příklad 2. *Dokažte, že pomocí dvoukorun a pětikorun dokážeme vyplatit libovolnou částku* N *korun, kde platí* $N \geq 4$*.* **[2]**

Příklad 3. *Mějme šachovnici o rozměrech* $2^n \times 2^n$ *pro* $n \in \mathbb{N}$*, na které chybí jedno rohové políčko. Ukažte, že je možné ji celou vydláždit dlaždicemi následujícího tvaru:* **[3]**



Příklad 4. *Uvažme Fibonacciho posloupnost* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, což je posloupnost splňující rekurentní podmínky* $F_1 = F_2 = 1$ *a* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *pro* $n \geq 3$*. Ukažte, že platí* **[2]**

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Příklad 5. *Dokažte indukcí, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *je* $(n^5 - n)$ *dělitelné pěti.* **[2]**

Příklad 6. *Rozhodněte, pro která přirozená* n *jde šachovnice* $n \times n$ *vydláždit dlaždicemi tvaru „L" pokrývajícími tři políčka. Jsou povolena všechna čtyři otočení.* **[4]**

2 Zadáno 21. 10. 2015

Příklad 7. *Najděte příklad dvojice relací* (R, S) *na* X *takové, že* R *i* S *jsou tranzitivní, ale* $R \cup S$*,* $R \setminus S$ *ani* $R \Delta S$ *tranzitivní nejsou. Operace symetrický rozdíl* $R \Delta S$ *vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin* R *a* S*, formálně* $R \Delta S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$*.* **[3]**

Příklad 8. *Dokažte, že platí* $R \circ R^{-1} = \Delta_X$*, je-li relace* $R \circ R^{-1}$ *reflexivní a slabě antisymetrická. Symbolem* Δ_X *značíme nejmenší reflexivní relaci na množině* X*:* **[3]**

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Příklad 9. *Zkuste odvodit rekurentní vzoreček pro počet ekvivalencí na* n*-prvkové množině.* **[4]**

Příklad 10. *Dokažte, že uspořádaná množina* $(\mathbb{N} \setminus \{1\}, |)$ *má nekonečně mnoho minimálních prvků. O která čísla se jedná? Nakreslete příslušný Hasseův diagram na prvcích* $1, 2, \ldots, 15$*.* **[2]**

Příklad 11. *Nakreslete Hasseův diagram částečně uspořádané množiny* $(\{2^k 3^l : k, l \in \mathbb{N}\}, |)$ *(množina čísel dělitelných pouze 2 a 3 uspořádaná relací dělitelnosti).* **[2]**

Příklad 12. *Nalezněte posloupnost 16 přirozených čísel, která neobsahuje monotónní podposloupnost délky 5. Dokažte, že nalezená posloupnost skutečně funguje.* **[3]**

Příklad 13. *Nechť* x *je reálné číslo takové, že* $x + \frac{1}{x}$ *je celé. Dokažte, že potom je pro každé přirozené* n *číslo* $x^n + \frac{1}{x^n}$ *celé.* **[3]**

3 Zadáno 18. 11. 2015

Příklad 14. *Nechť* $\check{s}(n)$ *značí počet permutací bez pevného bodu na* n*-prvkové množině. Dokažte vztah* **[2]**

$$\check{s}(n) = n! - n\check{s}(n-1) - \binom{n}{2}\check{s}(n-2) - \cdots - \binom{n}{n-1}\check{s}(1) - 1.$$

Příklad 15. *Dokažte, že pro Eulerovu funkci* $\varphi(n)$ *a nesoudělná čísla* $m, n \in \mathbb{N}$ *platí* **[3]**

$$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m)\varphi(n).$$

Neboli ukažte, že Eulerova funkce je pro daná m *a* n *multiplikativní.*

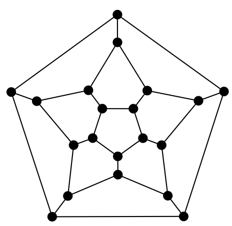
Příklad 16. *Jaký je počet slov délky* n *nad abecedou* $\{A, B\}$*, ve kterých se nevyskytují dvě po sobě jdoucí písmena* B*?* **[3]**

Příklad 17. *Nechť* k, n *jsou přirozená čísla. Dokažte, že* $(k!)^n$ *dělí* $(kn)!$. **[3]**
Hint: zkuste uvážit kombinatorickou interpretaci.

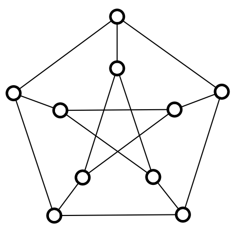
Příklad 18. *Kolik ekvivalencí na* n*-prvkové množině má právě* k *tříd?* **[3]**
Hint: vzpomeňte si na princip inkluze a exkluze.

4 Zadáno 2. 12. 2015

Příklad 19. *Nalezněte Hamiltonovskou kružnici pro pravidelný dvanáctistěn.* **[2]**



Příklad 20. *Dokažte, že Petersenův graf nemá Hamiltonovskou kružnici.* **[3]**



Příklad 21. *Pro která* $n \in \mathbb{N}$ *je cyklus* C_n *izomorfní se svým doplňkem?* **[3]**

Příklad 22. *Odvoďte minimální a maximální počet hran v grafu s* n *vrcholy a* k *komponentami souvislosti.* **[3]**

Příklad 23. *Nalezněte chybu v následujícím důkazu tvrzení „Každý graf s alespoň třemi vrcholy a se všemi stupni velikosti alespoň dva obsahuje cyklus* C_3*.“* **[3]**

Důkaz. Postupujeme indukcí podle počtu vrcholů n. Tvrzení platí v případě $n = 3$, protože daný graf může být jen C_3. Uvažme indukční krok, nechť G je graf na $n-1$ vrcholech, pro který tvrzení platí. Vytvoříme z něj nový graf G' na n vrcholech přidáním nového vrcholu, který je incidentní s alespoň dvěma vrcholy z G. Protože G obsahoval cyklus C_3, tak jej G' obsahuje také. $\square$

Příklad 24. *Ukažte, že každý souvislý graf* G *s alespoň dvěma vrcholy obsahuje dva různé vrcholy* u, v*, takové, že* $G - u$ *i* $G - v$ *jsou souvislé.* **[3]**

Příklad 25. *Pro každou dvojici přirozených čísel* n, k*, která splňuje podmínky* $n \geq k+1$ *a* $2 \mid kn$*, sestrojte* k*-regulární graf na* n *vrcholech.* **[3]**

5 Zadáno 18. 12. 2015

Příklad 26. *Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku.* **[3]**

Příklad 27. *Nechť máme* $m, n, k \in \mathbb{N}$. *Spočítejte počet cyklů délky* k *v grafu* $K_{m,n}$. **[3]**

Příklad 28. *Nechť* T *je strom s* $n \geq 2$ *vrcholy. Nechť* p_i, $i \in \mathbb{N}$, *označuje počet vrcholů v* T *stupně* i. *Ukažte, že platí* **[2]**

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \cdots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

Příklad 29. *Dokažte, že všechny stromy na* n *vrcholech mají stejný chromatický polynom.* **[2]**

6 Zadáno 9. 1. 2015

Příklad 30. *Dokažte, že pro každé přirozené* n *existuje nanejvýš* 4^n *neizomorfních stromů.* **[3]**
Hint: Může se hodit kódování stromů podle binárních řetízků z přednášky.

Příklad 31. *Ukažte, že graf na* n *vrcholech s* k *komponentami souvislosti je lesem právě tehdy, když má* $n-k$ *hran.* **[3]**

Příklad 32. *Spočtěte počet koster grafu, který vznikne slepením úplných grafů* K_5 *a* K_4 *přes společnou hranu.* **[3]**

Příklad 33. *Graf* G *je kriticky* k*-obarvitelný, pokud* $\chi(G) = k$ *a každý jeho podgraf* $H \subset G$ *je již* $(k-1)$*-obarvitelný. Nechť* $\delta(H)$ *označuje minimální stupeň grafu* H. *Ukažte, že je-li* H *kriticky* k*-obarvitelný, tak* $\delta(H) \geq k-1$. **[3]**