

# Diskrétní matematika – příklady na 5. cvičení\*

29. října 2013

## 1 Relace

(Binární) relace  $R$  je množina uspořádaných párů. Neboli  $R \subseteq X \times Y$ , kde  $X$  a  $Y$  jsou nějaké množiny. Je-li  $X = Y$ , tak mluvíme o *relaci na  $X$* . Fakt, že prvky  $x \in X$  a  $y \in Y$  jsou v relaci  $R$ , zapisujeme  $(x, y) \in R$  nebo  $xRy$ . Jsou-li  $X, Y, Z$  množiny a  $R \subseteq X \times Y$ ,  $S \subseteq Y \times Z$  jsou relace, pak *složení relací*  $R \circ S$  značí relaci  $T \subseteq X \times Z$ , kde pro  $x \in X$  a  $z \in Z$  platí  $xTz$  právě tehdy, když existuje  $y \in Y$  takové, že  $xRy$  a  $ySz$ . *Inverzní relací*  $R^{-1}$  k relaci  $R \subseteq X \times Y$  rozumíme  $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$ . Relace  $R \subseteq X \times X$  je

- (a) *reflexivní*, pokud  $xRx$  pro každé  $x \in X$ ;
- (b) *symetrická*, pokud  $xRy$  implikuje  $yRx$  pro každé  $x, y \in X$ ;
- (c) (*slabě*) *antisymetrická*, pokud  $xRy$  a  $yRx$  implikuje  $x = y$  pro každé  $x, y \in X$ ;
- (d) *tranzitivní*, pokud  $xRy$  a  $yRz$  implikuje  $xRz$  pro každé  $x, y, z \in X$ ;
- (e) *asymetrická*, pokud  $xRy$  implikuje  $\neg(yRx)$  pro každé  $x, y, z \in X$ .

Jako *ekvivalenci* označujeme relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní. *Zobrazení*  $f: X \rightarrow Y$  je relace  $f \subseteq X \times Y$  taková, že pro každé  $x \in X$  existuje právě jedno  $y \in Y$ , které je v relaci  $f$  s  $x$ .

**Příklad 1.** *Kolik je na  $n$ -prvkové množině  $X$  relací? Kolik z nich je reflexivních? Kolik symetrických? Kolik obojí?*

**Příklad 2.** *Nechť  $R$  a  $S$  jsou ekvivalence na množině  $X$ . Rozhodněte, které z následujících relací jsou nutně také ekvivalence:*

- (a)  $R \cap S$
- (b)  $R \cup S$
- (c)  $R \setminus S$
- (d)  $R \circ S$
- (e)  $R^{-1} \circ S^{-1}$

**Příklad 3.** *Nechť  $R \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$  je relace mezi dvojicemi přirozených čísel definována následovně:*

$$R = \{((a, b), (c, d)) \mid a + b \leq c - d\}.$$

*Rozhodněte, zda je  $R$  reflexivní, symetrická, tranzitivní či asymetrická.*

**Příklad 4.** (a) *Kolik existuje ekvivalenci na čtyřprvkové množině?*

(b) (\*) *Napadne vás vzoreček pro počet ekvivalencí na  $n$ -prvkové množině?*

**Příklad 5.** *Najděte příklad dvojice relací  $(R, S)$  na  $X$  takové, že  $R$  i  $S$  jsou tranzitivní, ale  $R \cup S$ ,  $R \setminus S$  ani  $R \Delta S$  tranzitivní nejsou. Operace symetrický rozdíl  $R \Delta S$  vybere prvky, které se vyskytují v právě jedné z množin  $R$  a  $S$ , formálně  $R \Delta S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$ .*

**Příklad 6.** *Dokažte, že relace  $R$  na množině  $X$  je tranzitivní právě tehdy, když  $R \circ R \subseteq R$ .*

**Příklad 7.** *Dokažte, že platí  $R \circ R^{-1} = \Delta_X$ , je-li relace  $R \subseteq X \times X$  reflexivní a slabě antisymetrická. Symbolem  $\Delta_X$  značíme nejmenší reflexivní relaci na množině  $X$ :*

$$\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>