Diskrétní matematika – příklady na 4. cvičení*

22. října 2013

1 Princip inkluze a exkluze

Věta (Princip inkluze a exkluze)**.** *Pro každý soubor konečných množin $A_1, A_2, \ldots, A_n$ platí*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \in \binom{\{1,2,\ldots,n\}}{k}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Příklad 1. *Ve třídě je 30 žáků, z nichž 12 má rádo matematiku, 14 fyziku a 13 chemii. Také víme, že 5 má rádo matematiku i fyziku, 7 fyziku i chemii a 4 žáci mají rádi matematiku i chemii. Tři žáci mají rádi všechny tři předměty. Kolik žáků nemá rádo ani jeden předmět?*

Příklad 2. *Kolik čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ je dělitelných 7, 10 nebo 15?*

Příklad 3. *Nechť m, n jsou přirozená čísla taková, že platí $m \geq n$. Jaký je počet surjektivních zobrazení typu $f\colon \{1, 2, \ldots, m\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$?*

Příklad 4. *Kolika způsoby lze seřadit do fronty 5 Čechů, 4 Maďary a 3 Rusy tak, aby všichni příslušníci žádného národa netvořili jeden souvislý blok?*

Příklad 5. *Kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, U, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov BAR, DEN, RAZIE?*

Příklad 6 (*)**.** *Nalezněte pomocí principu inkluze a exkluze vzorec, který umožňuje efektivně spočítat hodnotu Eulerovy funkce*

$$\varphi(n) = |\{m \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \gcd(n, m) = 1\}|$$

ze znalosti rozkladu čísla $n \in \mathbb{N}$ na prvočinitele.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/