

# Diskrétní matematika – příklady na 3. cvičení\*

13. října 2013

**Dirichletův princip 1.** Máme přirozená čísla  $n_1, \dots, n_k$  a rozdělení  $X_1, \dots, X_k$  množiny  $X$ , která má velikost alespoň  $1 + \sum_{i=1}^k (n_i - 1)$ . Potom existuje  $i$  takové, že platí  $|X_i| \geq n_i$ .

## 1 Kombinatorické počítání a Dirichletův princip

**Příklad 1.** Jsme v obchodě, kde mají  $k$  různých pohlednic. Chceme  $n$  kamarádům poslat pohlednici (každému právě jednu). Kolika to lze udělat způsoby? Co když chceme každému poslat různou pohlednici? Co když chceme každému poslat dvě různé pohlednice (ale různí kamarádi mohou dostat stejné)?

**Příklad 2.** Z kolika hesel máme na výběr, pokud každé heslo může obsahovat pouze písmena z anglické abecedy a musí mít délku 8? Co když navíc může obsahovat jen právě jednu samohlásku?

**Příklad 3.** Mějme množinu  $S$  velikosti  $n$ . Ukažte, že počet jejích podmnožin, které mají lichou velikost, se rovná počtu jejích podmnožin sudé velikosti. Jakému číslu se daný počet rovná?

**Příklad 4.** (a) Kolika způsoby můžeme rozdat  $n$  korun mezi  $k$  lidí tak, aby každý dostal alespoň jednu korunu?

(b) Jak se počet změní v případě, že netrváme na tom, aby každý něco dostal?

**Příklad 5.** Dokažte, že postavíme-li v posluchárně 12 židlí vedle sebe do řady a posadíme-li na ně 9 lidí (každý člověk sedí na právě jedné židli), tak vždy najdeme trojici po sobě jdoucích obsazených židlí.

**Příklad 6.** Dokažte, že pokud do čtverce se stranami délky 1 umístíme pět bodů, tak vždy mezi nimi dokážeme najít dva, které jsou v (Eukleidovské) vzdálenosti nanejvýš  $\sqrt{2}/2$ . Je možné nahradit  $\sqrt{2}/2$  menším číslem?

**Příklad 7.** V místnosti je šest lidí, přičemž se dva z každé dvojice znají nebo neznají. "Znát někoho" je symetrická relace, tedy pokud  $A$  zná  $B$ , tak i  $B$  zná  $A$ . Ukažte, že potom vždy existuje trojice lidí, kteří se všichni navzájem buď znají, nebo neznají. Může nastat situace, kdy každý člověk zná právě tři různé osoby v místnosti, je-li tam celkem sedm lidí?

**Příklad 8** (\*). Kolik existuje  $k$ -prvkových podmnožin množiny  $\{1, 2, \dots, n\}$ , v nichž se nevyskytují žádná dvě po sobě jdoucí čísla?

**Příklad 9** (\*). Jaký je počet neklesajících zobrazení  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ ?

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>