

# Diskrétní matematika – příklady na 1. cvičení\*

1. října 2013

## 1 Výroky

**Příklad 1.** Necht  $M$  je množina osob přítomných v posluchárně a necht  $W(x, y)$  znamená: osoba  $x$  zná příjmení osoby  $y$ . Zkoumejte platnost výroků

$$\begin{aligned}\forall x \in M \exists y \in M : W(x, y); \\ \forall y \in M \exists x \in M : W(x, y); \\ \exists x \in M \forall y \in M : W(x, y); \\ \exists y \in M \forall x \in M : W(x, y).\end{aligned}$$

**Příklad 2.** Platí

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} : (z > y \Rightarrow z > x)) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists z \in \mathbb{R} : (z > y \ \& \ z \leq x))?$$

## 2 Důkazové techniky

Základní důkazové techniky jsou následující:

- *Přímý důkaz:* řadou platných implikací se odvodí platnost závěru.
- *Nepřímý důkaz:* místo "Jestliže platí předpoklady, pak platí závěr." dokazujeme "Jestliže neplatí závěr, pak neplatí alespoň jeden z předpokladů".
- *Důkaz sporem:* místo "Jestliže platí předpoklady, pak platí závěr." ukazujeme "Jestliže platí předpoklady a platí opak závěru, pak platí opak jednoho z předpokladů (nebo platí jiné zjevně nepravdivé tvrzení)."
- *Matematická indukce:* pokročilejší technika.

**Příklad 3.** Dokažte přímo, nepřímo a sporem následující tvrzení: je-li  $n \in \mathbb{N}$  a  $n^2$  je liché, pak také  $n$  je liché.

**Příklad 4.** Dokažte indukcí, že každé  $n \in \mathbb{N}$  lze zapsat buď ve tvaru  $2k$  nebo  $2k - 1$  pro nějaké  $k \in \mathbb{N}$ .

**Příklad 5.** Ukažte, že  $\sqrt{2}$  není racionální číslo.

**Příklad 6.** Existují dvě iracionální čísla  $x, y$  taková, že  $x^y \in \mathbb{Q}$ ?

**Příklad 7.** Ukažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel. Zkuste použít různé typy důkazů.

**Příklad 8.** Dokažte, že každé nenulové racionální číslo lze zapsat jako součin dvou iracionálních čísel.

**Příklad 9.** Dokažte, že pomocí dvoukorun a pětikorun dokážeme vyplatit libovolnou částku  $N \geq 4$ .

---

\*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>