Diskrétní matematika – příklady na 13. cvičení*

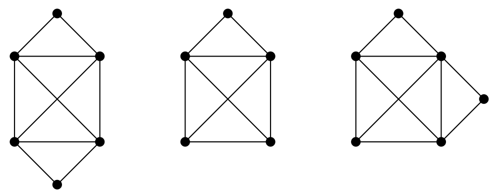
7. ledna 2014

1 Eulerovské grafy

Tah v grafu $G = (V, E)$ je posloupnost $(v_0, e_1, \dots, e_n, v_n)$, kde v_i jsou vrcholy a $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ hrany G, přičemž každou ranou projdeme nanejvýš jednou. Je *uzavřený*, pokud $v_n = v_0$. Uzavřený tah v G je *Eulerovský*, jestliže projde každou hranou právě jednou a každým vrcholem alespoň jednou.

Věta 1 (O jednotažkách)**.** *Graf je Eulerovský právě tehdy, když má všechny stupně sudé a je souvislý.*

Příklad 1. *Nakreslete následující grafy jedním tahem:*



Příklad 2. *Charakterizujte grafy s Eulerovským tahem, který nemusí být nutně uzavřený.*

2 Ramseyova teorie

Volněji řečeno, podle této teorie každý dostatečně velký systém obsahuje nějakou podstrukturu s hezkými vlastnostmi. Například na přednášce jste si nejspíš ukazovali, že v každém obarvení hran úplného grafu K_6 dvěma barvami (červenou a modrou) existuje červená nebo modrá kopie K_3. Toto tvrzení platí i obecněji.

Věta 2 (Ramseyova věta pro grafy)**.** *Pro každé* $k, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ *existuje* $N = N(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}$ *takové, že každé obarvení hran grafu* K_N k *barvami obsahuje jako podgraf kopii grafu* K_{n_i}*, jejíž všechny hrany mají barvu* i*.*

Nejmenší takové N značíme $R(n_1, \dots, n_k)$ a nazýváme jej *Ramseyovským číslem.* Čili předešlé tvrzení je speciálním případem pro dvě barvy ($k = 2$), velikosti $n_1 = n_2 = 3$ a říká, že platí $R(3, 3) \leq 6$.

Příklad 3. *Ukažte, že* $R(3, 3) = 6$*.*

Příklad 4 (Happy Ending Problem)**.** *Ukažte, že v každé množině pěti bodů v rovině* $\mathbb{R}^2$ *takových, že žádné tři body neleží na společné přímce, existuje čtveřice bodů, která tvoří konvexní čtyřúhelník.*

Příklad 5 (*)**.** *Zkuste dokázat Ramseyovu větu pro* $k = 2$ *a obecné* n*. Zvládnete ji dokázat i pro obecný počet barev* k*? Jaký odhad na číslo* $R(n_1, n_2)$ *z důkazu dostaneme? Zkuste popřemýšlet o dolním odhadu.*

Příklad 6 (*)**.** *(a) Uvažme obarvení všech bodů roviny* $\mathbb{R}^2$ *třemi barvami. Ukažte, že potom vždy dokážeme nalézt dva body stejné barvy, které jsou od sebe ve vzdálenosti jedna.*

(b) Ukažte, že existuje 2-obarvení bodů roviny, ve kterém není jednobarevný rovnostranný trojúhelník s hranami jednotkové délky.

*Informace o cvičení naleznete na http://kam.mff.cuni.cz/~balko/