

Diskrétní matematika – příklady na 11. cvičení*

10. prosince 2013

Strom je souvislý graf bez cyklů. Ekvivalentní definice jsou: graf, kde každé dva vrcholy lze spojit jednoznačně určenou cestou; souvislý graf, který přestane být souvislý po odebrání libovolné hrany; graf bez cyklů, kde po přidání libovolné nové hrany už cyklus vznikne; souvislý graf s počtem hran o jedna menším než je počet vrcholů.

Nesouvislý graf, jehož každá komponenta souvislosti je stromem, se nazývá *les*. *Automorfizmus* grafu $G = (V, E)$ je izomorfismus G a G , tedy bijekce $f: V \rightarrow V$ taková, že $\{u, v\} \in E$ právě tehdy, když $\{f(u), f(v)\} \in E$.

Příklad 1. *Nakreslete všechny stromy s vrcholy $\{1, 2, 3, 4\}$ a všechny po dvou neizomorfní stromy na 6 vrcholech.*

Příklad 2. *Ukažte, že graf na n vrcholech s k komponentami souvislosti je lesem právě tehdy, když má $n - k$ hran.*

Příklad 3. *Nechť T_1, T_2, \dots, T_k jsou podstromy stromu T takové, že každé dva mají neprázdný společný průnik. Ukažte, že potom existuje vrchol společný všem podstromům T_i , $i = 1, 2, \dots, k$.*

Příklad 4. *Nechť T je strom s $n \geq 2$ vrcholy. Nechť p_i , $i \in \mathbb{N}$, označuje počet vrcholů v T stupně i . Ukažte, že platí*

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - \dots - (n-3)p_{n-1} = 2.$$

Příklad 5. (a) *Najděte asymetrický strom. Tedy strom s jediným automorfizmem (identitou) a alespoň dvěma vrcholy.*

(b) *Jaký je nejmenší počet vrcholů, které může asymetrický strom mít?*

Příklad 6. *Dokažte, že pro každé přirozené n existuje nanejvýš 4^n po dvou neizomorfních stromů.*

Příklad 7. *Pro graf G a přirozené číslo k označíme jako $G^{(k)}$ graf s množinou vrcholů $V(G)$, ve kterém spojíme hranou každé dva různé vrcholy, které jsou v G ve vzdálenosti nanejvýš k .*

(a) (*) *Ukažte, že pro každý strom T obsahuje graf $T^{(3)}$ hamiltonovský cyklus.*

(b) *Použitím části a) dokažte, že pro každý souvislý G má graf $G^{(3)}$ hamiltonovský cyklus.*

(c) *Najděte souvislý graf G takový, že $G^{(2)}$ nemá hamiltonovský cyklus.*

*Informace o cvičení naleznete na <http://kam.mff.cuni.cz/~balko/>